Angelo Tonolo

Sistemi principali di normali di una immersa in una Vn

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.1, p. 3–6.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_1_3_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1930.

Sistemi principali di normali di una V_m immersa in una V_n.

Nota di A. TONOLO (a Padova).

Sunto. - *La Nota ha lo scopo di far vedere che il recente concetto, e la conseguente determinazione, di sistema principale di normali ad una varietà dello spazio hilbertiano introdotto dal* VITALI, *si possono trasportare alle varietà riemanniane immerse in altre varietà riemanniane.*

Nel recente libro del VITALI « Geometria nello spazio hilbertiano » è posto il concetto di sistema principale di normali ad una varietà dello spazio hilbertiano giacenti nel suo π_2, e si dimostra che in ogni punto della varietà esistono uno o infiniti di tali sistemi [2]. La presente Nota ha lo scopo di far vedere come tale concetto, e la conseguente determinazione, si possono trasportare alle varietà riemanniane immerse in altre varietà riemanniane.

Siano $x^r (r, s = 1, 2, 3, \ldots n)$, $y^\lambda (\lambda, \mu, \rho, \sigma = 1, 2, \ldots m)$; a_{rs}, $b_{\lambda\mu}$ rispettivamente coordinate curvilinee, e i tensori fondamentali di due varietà riemanniane V_n e V_m di cui la seconda immersa nella prima.

[2] G. VITALI, *Geometria nello spazio hilbertiano.* (Bologna, Nicola Zanichelli). Parte V, § 8.

In un punto qualesivoglia P di V_m, le componenti $\Omega_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot r}$ del tensore di curvatura di V_m determinano $\binom{m+1}{2}$ direzioni ortogonali in V_n alla V_m, le quali individuano uno spazio lineare S_p di V_n, il cui numero p di dimensioni è $\leq \binom{m+1}{2}$. Scegliamo in S_p, p direzioni indipendenti $\overset{j}{X}{}^r$ $(j=1, 2, \ldots p)$, due a due ortogonali in V_n uscenti da P: possiamo scrivere:

$$\Omega_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot r} = \sum_{1}^{p}{}_j \overset{j}{\omega}_{\lambda\mu} \overset{j}{X}{}^r, \tag{1}$$

dove le $\overset{j}{\omega}_{\lambda\mu}$ sono i coefficienti delle p seconde forme differenziali quadratiche indipendenti della V_m, rispetto alle p direzioni $\overset{j}{X}{}^r$ della V_n.

Poniamo ora con VITALI:

$$W_{\lambda\mu,\rho\sigma} = b_{\lambda\mu} b_{\rho\sigma} - \frac{b_{\lambda\rho} b_{\mu\sigma} + b_{\lambda\sigma} b_{\mu\rho}}{2}, \tag{2}$$

e indichiamo con W il determinante, di ordine $\binom{m+1}{2}$, formato con le $W_{\lambda\mu,\rho\sigma}$ in modo che in ogni riga sia costante la coppia $\lambda\mu$, in ogni colonna la coppia $\rho\sigma$, e che in ogni termine della diagonale principale sia $\lambda\mu = \rho\sigma$. Questo determinante è diverso dallo zero [1]. Indichiamo allora con $W^{\lambda\mu,\rho\sigma}$ il reciproco di $W_{\lambda\mu,\rho\sigma}$ diviso per $2^{\delta_\lambda^\mu + \delta_\rho^\sigma}$: si dimostra [2] che $W^{\lambda\mu,\rho\sigma}$ è un tensore quadruplo contravariante, cosicchè

$$\overset{j}{\omega}{}^{\lambda\mu} = \overset{j}{\omega}_{\rho\sigma} W^{\lambda\mu,\rho\sigma} \tag{3}$$

è un tensore doppio della stessa natura.

Facciamo le posizioni:

$$\begin{pmatrix} i & j \\ \omega, & \omega \end{pmatrix} = \overset{i}{\omega}_{\lambda\mu} \overset{j}{\omega}{}^{\lambda\mu}, \tag{4}$$

e chiamiamo col VITALI *sistema principale di normali in* S_p relativo al punto P, un insieme di p normali in S_p, spiccate dal punto P, due a due ortogonali in V_n, e tali che per esse si abbia

$$\begin{pmatrix} i & j \\ \omega, & \omega \end{pmatrix} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots p), \tag{5}$$

per ogni coppia ij con $i \neq j$.

[1] Cfr. VITALI, loc. cit., pag. 254.
[2] Cfr. VITALI, loc. cit., pag. 254.

Ha luogo il seguente:

TEOREMA: *In ogni punto* P *di* V_m *esistono in* S_p *uno o infiniti sistemi principali di normali.*

Infatti, supposte soddisfatte le (5) per un sistema di normali $\overset{j}{X}{}^r$, si ricava dalle (1)

$$\overset{j}{\omega}{}^{\lambda\mu}\Omega_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot r} = \binom{j\ \ j}{\omega,\ \omega}\overset{j}{X}{}^r, \tag{6}$$

Poniamo:

$$\Omega_{\lambda\mu,\rho\sigma} = a_{rs}\Omega_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot r}\Omega_{\rho\sigma}^{\cdot\cdot s},$$

e moltiplichiamo le (6) per $a_{rs}\Omega_{\rho\sigma}^{\cdot\cdot s}$, poi sommiamo rispetto ad r, s. Si trae:

$$\overset{j}{\omega}{}^{\lambda\mu}\Omega_{\lambda\mu,\rho\sigma} = \binom{j\ \ j}{\omega,\ \omega}\Omega_{\rho\sigma}^{\cdot\cdot s}\overset{j}{X}_s. \tag{7}$$

Ma le (1) equivalgono alle seguenti:

$$\overset{j}{\omega}_{\lambda\mu} = \Omega_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot r}\overset{j}{X}_r.$$

Quindi le (7) diventano:

$$\overset{j}{\omega}{}^{\lambda\mu}\Omega_{\lambda\mu,\rho\sigma} = \binom{j\ \ j}{\omega,\ \omega}\overset{j}{\omega}_{\rho\sigma} = \binom{j\ \ j}{\omega,\ \omega}\overset{j}{\omega}{}^{\lambda\mu}W_{\lambda\mu,\rho\sigma}.$$

In definitiva abbiamo il sistema di $\binom{m+1}{2}$ equazioni

$$\left\{\Omega_{\lambda\mu,\rho\sigma} - \binom{j\ \ j}{\omega,\ \omega}W_{\lambda\mu,\rho\sigma}\right\}\overset{j}{\omega}{}^{\lambda\mu} = 0. \tag{8}$$

Concludiamo allora che le $\overset{j}{\omega}{}^{\lambda\mu}$ formano una soluzione non nulla del sistema

$$\left\{\Omega_{\lambda\mu,\rho\sigma} - \binom{j\ \ j}{\omega,\ \omega}W_{\lambda\mu,\rho\sigma}\right\}\xi^{\lambda\mu} = 0.$$

Perciò il determinante $\left\|\Omega_{\lambda\mu,\rho\sigma} - \binom{j\ \ j}{\omega,\ \omega}W_{\lambda\mu,\rho\sigma}\right\|$, costruito nello stesso modo col quale abbiamo formato il determinante W con gli elementi $W_{\lambda\mu,\rho\sigma}$, deve essere nullo. Ne consegue che le quantità $\binom{j\ \ j}{\omega,\ \omega}$ sono radici dell' equazione in τ

$$\Delta_{\lambda\mu,\rho\sigma}(\tau) = \|\Omega_{\lambda\mu,\rho\sigma} - \tau W_{\lambda\mu,\rho\sigma}\| = 0.$$

Ora io dico che la forma

$$\Omega_{\lambda\mu,\rho\sigma}\xi^{\lambda\mu}\xi^{\rho\sigma} \tag{9}$$

non può assumere valori negativi per valori reali delle $\xi^{\lambda\mu}$: infatti, se ciò accadesse, poichè la (9) si può scrivere così:

$$a_{rs}\left(\Omega_{\lambda\mu}^{\cdot\,\cdot\,r}\,\xi^{\lambda\mu}\right)\left(\Omega_{\rho\sigma}^{\cdot\,\cdot\,s}\,\xi^{\rho\sigma}\right),$$

si dovrebbe concludere che per valori reali delle x^r, la forma

$$a_{rs}\,x^r\,x^s \tag{10}$$

assume valori negativi. Ora ciò non può essere perchè la (10) è una forma definita positiva.

La dimostrazione che il VITALI dà del teorema enunciato per le varietà dello spazio hilbertiano, si può ora adattare al caso nostro con modificazioni così ovvie che noi riteniamo sufficiente fermarci a questo punto.

Padova, 30 dicembre 1929.