Bollettino Unione Matematica Italiana

Leonida Tonelli

Un'osservazione sulle serie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.2, p. 57–59.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_2_57_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1930.

PICCOLE NOTE

Un'osservazione sulle serie.

Nota di Leonida Tonelli (a Bologna).

Sunto. - *La Nota contiene la dimostrazione di una proposizione sulle serie.*

Nel mio libro sulle *Serie trigonometriche* (Bologna, Zanichelli, 1928), a pag. 65, ho utilizzata la seguente osservazione, dovuta ad A. Kolmogoroff e G. Seliverstoff (¹) (che se ne servirono allo stesso scopo per cui io ebbi ad impiegarla):

Se la serie $\sum_2^\infty c_n^2 \lg n$ *(dove* c_n *è reale) è convergente, si può costruire una funzione* $\omega(x)$, *positiva, crescente costantemente e tendente all'infinito, e tale che:*

1°) *risulti convergente anche la serie* $\sum_2^\infty c_n^2\,\omega(n) \lg n$;

2°) *posto:*

$$\Delta_n = \frac{1}{\sqrt{\omega(n)\lg n}} - \frac{1}{\sqrt{\omega(n+1)\lg(n+1)}}, \quad \Delta_n' = \Delta_n - \Delta_{n+1},$$

tutte le Δ_n' *(per* $n \geq 2$*) risultino positive.*

Se si riflette che la condizione $\Delta_n' > 0$ è certamente soddisfatta quando la curva $y = 1 : \sqrt{\omega(x)\lg x}$ rivolge la sua concavità verso la direzione positiva dell'asse delle y (ciò che avviene già per la curva $y = 1 : \sqrt{\lg x}$) ci si persuade subito della verità della proposizione sopra riportata. Ciò nonostante, in un recente fascicolo del « Bulletin of the Amer. Mathem. Soc. » (Vol. 35, pag. 872), il signor J. D. Tamarkin, accennando al punto in cui io usai tale proposizione, scrive: « .... there is used an unproved lemma (p. 65) in the general theory of infinite series, which, so far as the reviewer is aware, is not stated in the standard treatises, like those of

(¹) « Rend. R. Accad. Lincei », vol. III (1926), pp. 307-310.

BROMWICH OR KNOPP ». A dire il vero, l'osservazione sopra riportata è di carattere talmente semplice ed elementare che io non avrei certo mai immaginato che dovesse condurre a laboriose ricerche nei trattati sulle serie. Comunque, dopo il rilievo del TAMARKIN, non parrà un'offesa alla perspicacia dei lettori di questo « Bollettino » se indico qui una delle infinite costruzioni della funzione $\omega(x)$.

Detto R_m il resto $\sum\limits_{m+1}^{\infty} c_n^2 \lg n$, sia m_1 il primo intero ≥ 2, tale che $R_{m_1} < \frac{1}{2^3}$, m_2 il primo intero $\geq 2m_1$, tale che $R_{m_2} < \frac{1}{3^3}, \ldots, m_r$ il primo intero $> 2m_{r-1}$, tale che $R_{m_r} < \frac{1}{(r+1)^3}$. Ciò posto, la funzione $\omega(x)$ che, per $x = 0, m_1, m_2, \ldots m_r, \ldots$ assume rispettivamente i valori $0, 1, 2, \ldots, r, \ldots$ e che, in ogni intervallo (m_r, m_{r+1}), varia linearmente fra i valori già fissati negli estremi dell'intervallo medesimo, serve perfettamente al nostro scopo.

La funzione $\omega(x)$, così definita, è, infatti, per $x > 0$, positiva e sempre crescente, e tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$. La sua derivata $\omega'(x)$ (derivata destra, nei punti m_r) è non crescente, perchè, essendo $m_{r+1} - m_r > 2m_r - m_r > m_r - m_{r-1}$, ne viene

$$\frac{\omega(m_r) - \omega(m_{r-1})}{m_r - m_{r-1}} = \frac{1}{m_r - m_{r-1}} > \frac{\omega(m_{r+1}) - \omega(m_r)}{m_{r+1} - m_r}.$$

Inoltre, la serie $\sum\limits_2^{\infty} c_n^2 \omega(n) \lg n$ risulta convergente, perchè, indicata con $\bar{s}_m$ la sua somma parziale, è

$$\bar{s}_{m_r} = \bar{s}_{m_1} + (\bar{s}_{m_2} - \bar{s}_{m_1}) + \ldots + (\bar{s}_{m_r} - \bar{s}_{m_{r-1}})$$
$$< \bar{s}_{m_1} + 2R_{m_1} + 3R_{m_2} + \ldots + rR_{m_{r-1}} < \bar{s}_{m_1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{r^2} + \ldots.$$

Infine, dal teorema del valor medio, segue, indicando con ξ un valore convenientemente scelto fra n ed $n + 1$,

$$\Delta_n = \frac{1}{2}[\omega(\xi)\lg\xi]^{-\frac{3}{2}}\left[\omega'(\xi)\lg\xi + \frac{\omega(\xi)}{\xi}\right] = \frac{1}{2}[\omega(\xi)\lg\xi]^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{\omega'(\xi)}{\omega(\xi)} + \frac{1}{\xi\lg\xi}\right];$$

e siccome, per $n \geq 2$, quest'espressione decresce al crescere di ξ, è $\Delta_n > \Delta_{n+1}$ ossia $\Delta_n' > 0$.

Come si vede, tanto la costruzione (che può variarsi in infiniti modi) della $\omega(x)$ quanto il successivo ragionamento sono molto semplici e non fanno certamente appello a nozioni di natura elevata.

Nel terminare questa breve Nota, mi si consenta ancora una osservazione. Il Tamarkin, secondo quanto scrive nel luogo indicato, avrebbe desiderato di trovare, nel mio libro sulle *Serie trigonometriche*, un maggior svolgimento di certe parti relative a ricerche assai recenti, ed anche la trattazione di qualche argomento sul quale io ho taciuto. È certo che, in un volume di 500 pagine, non è possibile di riunire tutto quello che è stato pubblicato, specialmente in questi ultimi anni, sulle serie trigonometriche. Un libro, poi, che non voglia ridursi ad una semplice enciclopedia su un dato argomento, deve essere scritto secondo un certo programma. Ed il programma che io mi formai mi condusse a sacrificare, per ragione di spazio (come dichiarai nella prefazione), alcuni argomenti che pur mi sarebbe piaciuto di esporre, ed anche a tralasciare od a sorvolare su quelle parti che non sono essenziali alla comprensione della teoria delle serie trigonometriche; ma sopratutto mi impose di tacere di quegli studi che, mentre non hanno alcun valore dal punto di vista delle applicazioni, ne hanno ben scarso da quello della teoria. Convengo tuttavia che, nel giudicare dell'importanza di talune ricerche, possa manifestarsi una grande diversità di criteri, e precisamente quella stessa diversità in base alla quale il Tamarkin ha potuto ritenere difficile e di natura elevata la proposizione che forma l'oggetto della presente Nota, e che io, invece, ho mostrato essere facile e di carattere elementare.