Bollettino Unione Matematica Italiana

Giovanni Vacca

Sul Commento di Leonardo Pisano al Libro X degli Elementi di Euclide, e sulla risoluzione delle equazioni cubiche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.2, p. 59–63.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_2_59_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1930.

Sul Commento di Leonardo Pisano al Libro X degli Elementi di Euclide, e sulla risoluzione delle equazioni cubiche.

Nota di GIOVANNI VACCA (a Roma).

Sunto. - *Il commento di* LEONARDO PISANO *al Libro X degli* Elementi, *già ritenuto perduto da* B. BONCOMPAGNI, *si trova nel Cap. XIV del* Liber Abbaci, *ed è un'esposizione originale, sotto forma algebrica, del Libro X.* LEONARDO *vi aggiunge lo studio delle proprietà delle radici cubiche.* SCIPIONE DAL FERRO, *partì forse da questo scritto di* LEONARDO *per ritrovare la risoluzione delle equazioni di terzo grado.*

1. B. BONCOMPAGNI, dopo un lungo ed accurato studio di LEONARDO PISANO, riteneva probabile [1] che tra le opere perdute di questo grande matematico del secolo XIII vi fosse un libro di

(1) B. BONCOMPAGNI, *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano.* Roma, 1854, p. 248.

commento al X Libro di EUCLIDE. Egli adduceva a prova dell'esistenza di questo scritto una testimonianza del maestro ANTONIO DE' MAZZINGHI ([2]), il quale scriveva di aver cognizione del libro anzidetto, e ad una allusione di LEONARDO stesso, il quale nel suo *Flos* ([3]) aveva scritto: *Super libro ipso X Euclidis accuratius studui, adeo quod sint theoremata ipsius, memorie commendari et ipsarum intellectum comprehendi. Et quia difficilior est antecedentium et quorundam sequentium librorum Euclidis, ideo ipsum X librum glosare incepi, reducens intellectum ipsius ad numerum, qui in eo per lineas et superficies demonstratur, qui liber X tractat de diversitatibus XV linearum rectarum, quarum XV linearum duo vocantur rite seu ratiocinate. Reliquae XIII dicuntur aloge sive inratiocinate.*

Ora nella parte seconda del capitolo XIV del *Liber Abbaci* di LEONARDO ([4]), egli dice: *Ut que secuntur in hoc capitulo latius secundum numerum demonstrentur, diffinitiones duarum linearum ratiocinatarum super quas X Euclidis liber geometrie tractat, assignare disposui. Prima quidem linea dicitur riti*.... e prosegue esponendo *secundum numerum*, cioè *aritmeticamente*, il contenuto del libro X degli *Elementi*.

([2]) Ibid., pp. 241. 246.

([3]) *Opuscoli di Leonardo Pisano*, pubblicati da B. BONCOMPAGNI, 2ª ed., Roma, 1857, p. 3.

C. H. HASKINS, *Studies in History of Mediaeval Science*, 2ª ed., Cambridge, 1927, pp. 248-249, pone ancora in dubbio, la data 1225 indicata nel titolo del *Liber Quadratorum*, ed accenna alla soluzione proposta da G. ENESTRÖM in « Bibl. Math. », 1908, p. 72. Mi sembra invece accettabile la soluzione di M. LAZZARINI (« Boll. di Bibl. e Storia delle Mat. », di G. Loria, Torino, 1904, p. 3), il quale giustamente ha osservato, che, secondo il calendario pisano, l'intervista di Leonardo con Federico II ebbe veramente luogo nel luglio del 1226. Non vedo invece alcuna ragione che giustifichi la supposizione del Haskins, di una interpolazione nel testo del *Flos* e del *Liber Quadratorum*.

([4]) LEONARDO PISANO, *Liber Abbaci*, Roma, 1857, p. 356. B. Boncompagni aveva raccolto un ricchissimo materiale di studio per il testo delle opere di Leonardo. Sventuratamente è andato disperso. Occorrerà ricostituirlo, poichè l'edizione del Boncompagni non può considerarsi come definitiva. Essa riproduce un solo manoscritto, e manca l'analisi critica degli altri, circa una ventina, nelle varie biblioteche d'Europa, pure segnalati dallo stesso Boncompagni.

Ciò è stato osservato ad es. da ACHILLE PELLIZZARI, *Il Quadrivio nel Rinascimento*, Napoli, 1924, pp. 37-38. È da augurarsi una edizione critica, completa del più grande matematico italiano del medioevo.

Può quindi ritenersi che questo capitolo XIV del *Liber Abbaci* contiene certamente nella sostanza, e assai probabilmente anche nella forma, il commento di LEONARDO al Libro X di EUCLIDE, il quale commento non può quindi ritenersi interamente perduto. Anzi il fatto che si trovano più manoscritti [5] che contengono questo solo capitolo XIV, può spiegare come ANTONIO DE' MAZZINGHI possa aver considerato come un'opera a parte questo capitolo, il quale potrebbe anche essere effettivamente stato scritto dapprima completamente separato dalla prima edizione del *Liber Abbaci* del 1202, e poi forse da lui stesso inserito nella grande opera, nella seconda edizione del 1228.

2. La lettura di questo capitolo XIV del *Liber Abbaci* conduce però alla conclusione che esso è veramente uno scritto originale, inspirato bensì al Libro X di EUCLIDE, ma assai diverso per l'esposizione puramente algebrica che ne semplifica il contenuto e lo presenta sotto nuovi aspetti.

Acquistano allora particolare rilievo, tra le molte proposizioni del Libro X di EUCLIDE, quelle che formano l'oggetto dell'ultima sezione dello scritto di LEONARDO, *De Inventione radicum binomiorum et recisorum* (pp. 376-378). Esse hanno per oggetto la trasformazione che, coi nostri simboli, possiamo scrivere:

$$\sqrt{(a+\sqrt{b})}+\sqrt{(a-\sqrt{b})}=\sqrt{[2a+2\sqrt{(a^2-b)}]}$$

cioè, col linguaggio di LEONARDO, la somma delle radici di un binomio $a+\sqrt{b}$ e del suo reciso $a-\sqrt{b}$ è uguale alla radice di un unico binomio.

Conclusa così l'esposizione del Libro X di EUCLIDE, LEONARDO procede oltre nello studio delle radici cubiche e delle loro somme. *(Incipit pars quinta de inventione, radicuum cubicarum et de additione, multiplicatione et extractione seu divisione earundem)* [6].

Egli pone a fondamento della trattazione, lo sviluppo del cubo di un binomio, che era già stato dato da DIOFANTO, IV, 9, ma che probabilmente LEONARDO non conobbe. Procede poi a dimostrare le proprietà

$$\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{(ab)}\,;\quad \left(\sqrt[3]{a}\right)^2=\sqrt[3]{a^2}\,;\quad \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

(5) P. es. il Ms. di Firenze, Magliab. Cl. XI, n.° 38. Cfr. B. BONCOMPAGNI, *Della Vita e delle Opere di Leonardo Pisano*. « Atti dell'Acc. Pont. dei N. Lincei », Roma, 1851, p. 58.

(6) LEONARDO PISANO, *Liber Abbaci*, p. 378.

ed infine conclude dicendo che: *radices quæ proportionem non habent, addi nec disgregari possunt,* e porta gli esempi:

$$\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}. \quad \sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}.$$

e di essi dice: *aliter dici non possunt pulchrius.* E qui finisce.

3. È singolare che per ottenere la risoluzione di un'equazione cubica priva del secondo termine bastava fare un solo passo, osservare cioè che, posto

$$\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}+\sqrt[3]{(a-\sqrt{b})}=x$$

si ha subito, elevando a cubo ed applicando le regole insegnate da LEONARDO

$$x^3=3\sqrt[3]{(a^2-b)}x+2a:$$

quindi l'equazione priva del secondo termine:

$$x^3=px+q$$

ha per soluzione

$$x=\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}+\sqrt[3]{(a-b)}$$

ove si ponga:

$$a=\frac{q}{2}, \quad b=\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}$$

che è la soluzione di SCIPIONE DAL FERRO. Questa via sembra più semplice e naturale di quella esposta da TARTAGLIA e da lui comunicata a CARDANO, e meriterebbe forse di essere ancor oggi esposta nella scuola.

Si può indurre che sia proprio questa la via seguita da SCIPIONE DAL FERRO, quando si osservi che RAFAEL BOMBELLI, nella sua *Algebra* [7], dedica tutta la prima parte dell'opera all'esposizione del Libro X di EUCLIDE, a cui aggiunge l'operar delle radici *cube, com'esso decimo opera sulle quadrate,* seguendo così il piano dell'esposizione del cap. XIV del *Liber Abbaci* di LEONARDO PISANO, con l'aggiunta però di nuove ed importanti scoperte. BOMBELLI dedica un capitolo del libro I *(Regole per trovar il lato cubo di un binomio)* all'esposizione di un metodo assai simile a quello qui esposto, ma che non mi sembra condurre il lettore ad una soddisfacente dimostrazione della formula di risoluzione del-

[7] R. BOMBELLI, *L'Algebra,* Bologna, 1572.

l'equazione cubica; tanto che nel libro II, esponendo la teoria generale delle equazioni cubiche, dà nuove ed originali dimostrazioni geometriche ([8]).

Mi sembra che se ne possa dedurre che il libro I del BOMBELLI conservi un'eco dei metodi di SCIPIONE DAL FERRO, al quale ultimo si potrebbe supporre risalga l'idea di ottenere la risoluzione delle equazioni cubiche, come un'immediata continuazione delle più importanti proposizioni del Libro X di EUCLIDE, esposte sotto forma algebrica ([9]), forse per la prima volta, da LEONARDO PISANO.

([8]) ETTORE BORTOLOTTI nel suo scritto: *L'Algebra nella Scuola matematica bolognese nel secolo XVI* (« Per. di Mat. », Bologna, 1925, p. 159) e più recentemente nella prefazione ai libri inediti da lui scoperti dell'*Algebra* di R. BOMBELLI (Vol. 7 della Collez. per la Storia e la filos. della Mat., diretta da F. Enriques e promossa dall'Istit. Nazionale per la Storia delle Scienze, Bologna, 1929, p. 30) ha richiamato giustamente l'attenzione su questo capitolo.

([9]) Su Leonardo Pisano si veda una recente bibliografia in ETTORE BORTOLOTTI, *Italiani scopritori e promotori di teorie algebriche*, « Ann. della R. Univ. di Modena », 1919. Ad essa è da aggiungere quella data da GINO LORIA nella sua « Biogr. di L. P. » in A. MIELI, *Gli scienziati italiani*, vol. I, Roma, 1919, ed inoltre il volume di F. WOEPKE, *Sur l'introduction de l'aritméthique indienne en Occident*, etc., Roma, 1859, in cui è contenuta a p. 65 una diligente analisi del cap. XIV del *Liber Abbaci*, la quale però non rileva a sufficienza, nè l'originalità, nè lo spirito dello scritto, come qui ho tentato di fare.