BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

SILVIO CINQUINI

Sopra un'equazione funzionale

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.2, p. 63–67.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_2_63_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1930.

Sopra un'equazione funzionale.

Nota di SILVIO CINQUINI (a Bologna).

Sunto. - *L'Autore deduce dalla considerazione di un'operazione integrale analitica la soluzione di un tipo di equazione funzionale, analogamente a quanto è stato fatto, tra l'altro, dal prof.* S. PINCHERLE *nella Memoria* Sopra alcuni nuclei analitici, *in un caso che rientra in quello considerato nella presente Nota.*

Nella Memoria *Sopra alcuni nuclei analitici* (1) il prof. S. PINCHERLE dimostra che assumendo come nucleo l'espressione $\dfrac{1}{y - \beta(x)}$

(1) « Rend. della R. Accademia delle Scienze di Bologna », 1915-16, Vol. XX. Vedasi il n.° 7.

si ottiene, sotto opportune condizioni, un'operazione integrale analitica regolare normale, e da ciò trae importanti conseguenze.

Mi propongo, nella presente Nota, di dimostrare che anche assumendo come nucleo l'espressione

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{\alpha_n(x)}{[y-\beta(x)]^{n+1}}$$

si dà origine, sotto le ipotesi enunciate nel seguente n.° 1, ad una operazione integrale analitica regolare normale, e ne faccio applicazione ad un'equazione funzionale.

1. Considero l'espressione

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{\alpha_n(x)}{[y-\beta(x)]^{n+1}} \tag{1}$$

ove

$$\alpha_n(x) = \sum_{s=n}^{\infty} a_{ns}x^s, \qquad (n=0, 1, \ldots m),$$

$$\beta(x) = \sum_{s=1}^{\infty} b_s x^s,$$

sono serie di potenze aventi un raggio P comune di convergenza, ed è

$$a_{00} \neq 0 \quad ; \quad 0 < |b_1| < 1.$$

Sotto queste ipotesi, supposti i piani-sfera delle due variabili x *e* y *sovrapposti, dico: che si può determinare una corona circolare tale, che, comunque presi in essa* x *e* y, *l'espressione* (1) *definisce una funzione* K(x, y) *analitica regolare delle due variabili* x *e* y, *e questa funzione assunta come nucleo, dà origine ad un'operazione integrale analitica regolare normale.*

Infatti, sia ρ un numero positivo inferiore per quanto poco si vuole al raggio di convergenza della $\beta(x)$, e sia m il massimo modulo di $\beta(x)$ in (ρ); per il teorema del valor maggiorante si ha:

$$|b_n| \leq \frac{m}{\rho^n}$$

e quindi

$$|\beta(x)| \leq |b_1 x| + \frac{m|x|^2}{\rho^2 - \rho|x|}.$$

Si soddisferà perciò alla condizione

$$|\beta(x)| < b\,|x|,$$

ove b è un numero positivo compreso fra $|b_1|$ e 1, per

$$|x| < \frac{\rho^2(b-|b_1|)}{m+(b-|b_1|)\rho} \equiv \bar{r}.$$

Preso un numero positivo $r < \begin{cases} \bar{r} \\ P \end{cases}$ e un numero r_1 tale che

$$br < r_1 < r,$$

dico che (r_1, r) è la corona circolare richiesta.

Considerati gli x e y appartenenti ad (r_1, r), siccome per $r_1 < |x| < r$ è

$$|\beta(x)| < b\,|x| < br < r_1,$$

le espressioni

$$\frac{1}{[y-\beta(x)]^{n+1}} = \frac{1}{y^{n+1}\left[1-\frac{\beta(x)}{y}\right]^{n+1}} \quad (\text{per } n=0, 1, \ldots m)$$

sono sviluppabili in serie della forma:

$$\sum_{p=0}^{\infty}\binom{n+p}{p}\frac{\beta^p(x)}{y^{p+n+1}} \qquad (\text{per } n=0, 1, \ldots m).$$

Inoltre entro la corona circolare (r_1, r) queste serie sono uniformemente convergenti e quindi si possono ordinare in serie di potenze di x e y. Onde l'espressione (1) può scriversi:

$$\sum_{n=0}^{m}\alpha_n(x)\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\binom{n+p}{p}[b_1{}^p x^p + d_{p,p+1}x^{p+1} + d_{p,p+2}x^{p+2} + \ldots]}{y^{p+n+1}}$$

e siccome per x preso nella corona circolare (r_1, r) anche le $\alpha_n(x)$ sono uniformemente convergenti (avendo scelto $r < P$) i prodotti $\alpha_n(x)\sum_{p=0}^{\infty} \ldots$ possono eseguirsi termine a termine, e le $m+1$ serie così ottenute possono ordinarsi in un'unica serie che è ancora uniformemente convergente per tutte le coppie x e y prese entro (r_1, r).

Resta così provato che l'espressione (1) definisce nella corona circolare (r_1, r) una funzione analitica regolare $K(x, y)$, il cui sviluppo in serie è

$$(2) \qquad K(x, y) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^r\left\{\left[\sum_{n=0}^{m}\binom{r}{n}b_1{}^{r-n}a_{n,n}\right] + C_{r,r+1}x + C_{r,r+2}x^2 + \ldots\right\}}{y^{r+1}}$$

ove naturalmente per $r < m$ la somma $\sum_n$ va soltanto da 0 a r, ciò che del resto è implicito nella scrittura (2).

Risulta inoltre, dall'esistenza della corona circolare (r_1, r), che l'operazione integrale analitica definita dalla funzione K è regolare, e, dalla forma dello sviluppo in serie (2), che è anche normale.

Il teorema enunciato è quindi completamente provato.

2. Assunta la funzione (1) come nucleo, in base al teorema precedente, valgono per essa tutti i risultati validi per i nuclei analitici regolari normali [1].

Così il determinante $D(\lambda)$ di FREDHOLM è funzione intera di λ, di genere zero, e i valori caratteristici sono dati dalla successione:

$$\frac{1}{\sum_{n=0}^{m}\binom{r}{n} b_1^{r-n} a_{nn}} \qquad (\text{per } r = 0, 1, 2, ...).$$

Inoltre l'equazione di 2ª specie

$$\varphi(x) - \lambda \frac{1}{2\pi i}\int_{(l)} K(x, y)\varphi(y)dy = f(x)$$

(ove f è una funzione analitica regolore per $x = 0$; ed (l) è una curva regolare semplice, chiusa, tutta contenuta nella corona circolare (r_1, r), e comprendente nel suo interno il cerchio (r_1)), quando si prenda per λ un valore diverso dei precedenti, ha una e una sola soluzione.

Per λ uguale, invece, ad uno dei valori caratteristici, l'equazione omogenea ammette almeno una soluzione non identicamente nulla, determinata a meno di una costante arbitraria; invece l'equazione completa ha soluzione soltanto, se la sua funzione nota è ortogonale alle funzioni caratteristiche associate corrispondenti al valore caratteristico considerato.

3. Essendo $F(y)$ funzione analitica regolare per $y = 0$, e convergente in un cerchio di raggio $R > r_1$ ed essendo (l) una circonferenza di raggio $r_1 < l < \begin{cases} r \\ R \end{cases}$, in base alla formula che dà la derivata n^{sima} dell'integrale di CAUCHY, risulta:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(l)}\left\{\sum_{n=0}^{m}\frac{\alpha_n(x)}{[y-\beta(x)]^{n+1}}\right\}F(y)dy = \sum_{n=0}^{m}\frac{\alpha_n(x)}{n!}F^{(n)}[\beta(x)].$$

[1] Si vedano i n.i 1-6 della Memoria citata a pag. 1, in cui i valori caratteristici sono detti « numeri invarianti ».

Perciò lo studio dell' equazione funzionale:

$$(3) \quad \varphi(x) - \lambda \left\{ \alpha_0(x)\varphi[\beta(x)] + \frac{\alpha_1(x)}{1!}\varphi'[\beta(x)] + \dots + \frac{\alpha_m(x)}{m!}\varphi^{(m)}[\beta(x)] \right\} = f(x)$$

(ove φ è funzione incognita; $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta$ e f sono le funzioni indicate ai n.i 1 e 2) è ricondotto a quello dell' equazione integrale la cui risoluzione è indicata dalle considerazioni del n.° 2.