Lidia Cestonaro

Una proprietà delle superficie col Π_2, a tre dimensioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.2, p. 74–79.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_2_74_0>

Una proprietà delle superficie col Π_2 a tre dimensioni.

Nota di LIDIA CESTONARO (a Venezia).

Sunto. - *L'A. dimostra che, per una superficie col* Π_2 *a tre dimensioni, la prima varietà principale è un'ellisse e che, le intersezioni del cono geodetico col piano passante per il suo vertice, per il centro di detta ellisse e perpendicolare al piano di questa ellisse, corrispondono alla coppia ortogonale di una involuzione delle tangenti, messa recentemente in luce dal* VITALI.

Al n.° 1 dimostro che, per una superficie V col Π_2 a tre dimensioni la prima varietà principale W (¹) (che evidentemente è una conica (²)) è un'ellisse (³).

Recentemente il dott. ZWIRNER (⁴) ha dimostrato che per una superficie col Π_2 a due dimensioni, *la coppia ortogonale della involuzione associata alla forma* F_2 *del Fubini corrisponde alle in-*

(1) G. VITALI, *Geometria dello spazio Hilbertiano* (ed. N. Zanichelli, 1929) pag. 230. Questo libro sarà indicato in seguito con « G. H. ».

(2) « G. H. », pag. 236.

(3) Questo risultato l'ho conseguito nella mia tesi di laurea discussa a Padova nel Novembre 1929.

(4) G. ZWIRNER, *Una proprietà della varietà principale di una superficie con il* Π_2 *a due dimensioni.* (« R. Ist. Ven. », (1929-30), pagg. 195-198).

tersezione della prima varietà principale (che anche in questo caso è un'ellisse) *colla retta che unisce il punto della superficie col centro di questa ellisse.*

Contemporaneamente il VITALI ha messo in evidenza per le superficie col Π_2 a tre dimensioni una involuzione delle tangenti che si può considerare l'analoga di quella che ho richiamato pel caso del Π_2 a due dimensioni (¹).

Indichiamo con r la perpendicolare condotta dal punto della varietà al piano di W. L'involuzione del VITALI è costituita dalle coppie tangenti a due geodetiche le cui normali principali sono le intersezioni di un piano α di Π_2 per r con il cono geodetico (²).

Il prof. VITALI mi ha suggerito di verificare se la coppia ortogonale della sua involuzione non corrisponda analogamente al caso dello ZWIRNER, alla coppia di generatrici che si ha quando α passa per il centro della W. Le cose vanno proprio così e ne dò la dimostrazione ai n.ⁱ 1 e 2.

1. Sia adunque V una superficie col Π_2 a tre dimensioni, sia $f(t; u_1, u_2)$ una sua determinante. In questo caso il cono geodetico è un cono quadrico (³) e la W giace in un piano γ (⁴). Assumiamo, con origine nel punto P di V un sistema cartesiano x, y, z, nel Π_2 in modo che l'asse z riesca perpendicolare a γ.

Siano X, Y, Z dei parametri normali degli assi x, y, z e poniamo al solito

$$x_{r,s} = \int f_{r,s} X dt \text{ ecc. ed } a_{r,s} = \int f_r f_s \, dt.$$

Per i punti della W dovrà risultare $z = \delta$, dove δ è la distanza di P da γ, e quindi

$$(\Sigma_{hk} z_{h,k} du_h du_k) : (\Sigma_{hk} a_{h,k} du_h du_k) = \delta \text{ (⁵)} \qquad (\delta \neq 0).$$

Dovendo quest'ultima relazione essere soddisfatta per tutti i du_h dovrà essere

$$z_{h,k} = \delta \cdot a_{h,k}. \tag{1}$$

(¹) G. VITALI, *Sopra alcune involuzioni delle tangenti ad una superficie.* (« R. Ist. Ven. », (1929-30), pagg. 107-112).

(²) « G. H. », pag. 230.

(³) G. VITALI, *Sopra alcuni invarianti associati ad una varietà e sopra i sistemi principali di normali alle superfici.* (« Annales de la Société Polonaise de mathématique », t. VII, année 1928, pagg. 43-67), pag. 63.

(⁴) « G. H. », pag. 236.

(⁵) « G. H. », pag. 236.

L'equazione del cono geodetico è

$$[X.X]x^2 + [Y,Y]y^2 + [Z.Z]z^2 + \\ + 2[X.Y]xy + 2[X.Z]xz + 2[Y.Z]yz = 0 \text{ (1)},$$

dove X^{rs} è il reciproco di $x_{r.s}$ (e analogamente per Y^{rs} e Z^{rs}) nel determinante

$$D = \begin{vmatrix} x_{1.1} & x_{1.2} & x_{2.2} \\ y_{1.1} & y_{1.2} & y_{2.2} \\ z_{1.1} & z_{1.2} & z_{2.2} \end{vmatrix}$$

(D è diverso da zero essendo per ipotesi il H_2 a tre dimensioni) e

$$[Y.Y] = 2X^{11}Y^{22} - X^{12}Y^{12} + 2X^{22}Y^{11}$$

ed in particolare

$$[X.X] = 4X^{11}X^{22} - (X^{12})^2.$$

L'equazione della W diventa quindi

$$[X.X]x^2 + [Y.Y]y^2 + 2[X.Y]xy + 2[X.Z]x\delta + 2[Y.Z]y\delta + [Z.Z]\delta^2 = 0.$$

La W è *una conica generica*: infatti il suo discriminante è

$$A = \begin{vmatrix} [X.X] & [X.Y] & [X.Z] \\ [X.Y] & [Y.Y] & [Y.Z] \\ [X.Z] & [Y.Z] & [Z.Z] \end{vmatrix} \delta^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} 2X^{11} & -X^{12} & 2X^{22} \\ 2Y^{11} & -Y^{12} & 2Y^{22} \\ 2Z^{11} & -Z^{12} & 2Z^{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X^{22} & X^{12} & X^{11} \\ Y^{22} & Y^{12} & Y^{11} \\ Z^{22} & Z^{12} & Z^{11} \end{vmatrix} \delta^2.$$

Ma

$$\begin{vmatrix} X^{11} & X^{12} & X^{22} \\ Y^{11} & Y^{12} & Y^{22} \\ Z^{11} & Z^{12} & Z^{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{D},$$

quindi

$$A = 4\delta^2 \frac{1}{D^2}$$

ed è evidentemente diverso da zero.

(1) G. ALIPRANDI, *Sopra le normali principali (secondo il Vitali) di una superficie generica dello spazio hilbertiano.* (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », 1928, vol. VIII, serie 6ª, fasc. 7-8, pagg. 273-276).

La W *è un'ellisse*; infatti è

$$A_{33} = \begin{vmatrix} [X, X] & [X, Y] \\ [X, Y] & [Y, Y] \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2X^{11} & -X^{12} & 2X^{22} \\ 2Y^{11} & -Y^{12} & 2Y^{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X^{22} & X^{12} & X^{11} \\ Y^{22} & Y^{12} & Y^{11} \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} X^{11} & X^{12} \\ Y^{11} & Y^{12} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X^{22} & X^{12} \\ Y^{22} & Y^{12} \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} X^{12} & X^{22} \\ Y^{12} & Y^{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X^{12} & X^{11} \\ Y^{12} & Y^{11} \end{vmatrix} +$$

$$+ 4\begin{vmatrix} X^{22} & X^{11} \\ Y^{22} & Y^{11} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X^{11} & X^{12} \\ Y^{11} & Y^{22} \end{vmatrix}.$$

Ma (¹)

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} X^{11} & X^{12} \\ Y^{11} & Y^{12} \end{vmatrix} = z_{2,2} : D \qquad \begin{vmatrix} X^{11} & X^{22} \\ Y^{11} & Y^{22} \end{vmatrix} = -z_{1,2} : D$$

$$\begin{vmatrix} X^{12} & X^{22} \\ Y^{12} & Y^{22} \end{vmatrix} = z_{1,1} : D$$

quindi

$$A_{33} = \{ 2z_{1,1} z_{2,2} + 2z_{1,1} z_{2,2} - 4z^2_{1,2} \} : D = 2(z, z) : D$$

e per la (1)

$$A_{33} = 2\delta^2 (a, a) : D^2$$

e, poichè $(a, a) > 0$, è $A_{33} > 0$.

2. Le coordinate del centro 0 di W sono:

$$x_0 = \frac{A_{13}}{A_{33}}, \quad y_0 = \frac{A_{23}}{A_{33}}, \quad z_0 = \delta.$$

Ma

$$A_{13} = \begin{vmatrix} [X, Y] & [Y, Y] \\ [X, Z] & [Y, Z] \end{vmatrix} \cdot \delta = \begin{vmatrix} 2Y^{11} & -Y^{12} & 2Y^{22} \\ 2Z^{11} & -Z^{12} & 2Z^{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X^{22} & X^{12} & X^{11} \\ Y^{22} & Y^{12} & Y^{11} \end{vmatrix} \cdot \delta =$$

$$= \Bigg\{ -2\begin{vmatrix} Y^{11} & Y^{12} \\ Z^{11} & Z^{12} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X^{22} & X^{12} \\ Y^{22} & Y^{12} \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} Y^{12} & Y^{22} \\ Z^{12} & Z^{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X^{12} & X^{11} \\ Y^{12} & Y^{11} \end{vmatrix} +$$

$$+ 4\begin{vmatrix} Y^{22} & Y^{11} \\ Z^{22} & Z^{11} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X^{11} & X^{22} \\ Y^{11} & Y^{22} \end{vmatrix} \Bigg\} \cdot \delta$$

e per formule analoghe alle (2)

$$A_{13} = \delta \{ 2x_{2,2} z_{1,1} + 2x_{1,1} z_{2,2} - 4x_{1,2} z_{1,2} \} : D^2 =$$
$$= 2\delta (x, z) : D^2 = 2\delta^2 (x, a) : D^2.$$

(¹) Ved. G. ALIPRANDI, loc. cit..

Analogamente

$$A_{23} = \begin{vmatrix} [X, X] & [X, Y] \\ [X, Z] & [Y, Z] \end{vmatrix} \delta = 2(y, z) : D^2 = 2\delta^2(y, a) : D^2$$

quindi

$$x_0 = \frac{(x, a)}{(a, a)}, \quad y_0 = \frac{(y, a)}{(a, a)}, \quad z_0 = \delta.$$

Perciò

$$T = (x, a)X + (y, a)Y + \delta(a, a)Z$$

è un parametro di OP.

Consideriamo ora il piano α passante per OP e perpendicolare a γ. I parametri delle intersezioni di α col cono geodetico saranno quei $\Sigma f_{r,s}\lambda_r\lambda_s$, per cui

$$mT + nZ = \Sigma f_{r,s}\lambda_r\lambda_s$$

e quindi per cui

$$\{(x, a)X + (y, a)Y + \delta(a, a)Z\}m + n\delta Z = X\sum_1^2{}_{r,s} x_{r,s}\lambda_r\lambda_s +$$
$$+ Y\sum_1^2{}_{r,s} y_{r,s}\lambda_r\lambda_s + Z\delta\sum_1^2{}_{r,s} a_{r,s}\lambda_r\lambda_s$$

e identificando i coefficienti di X, Y, Z

$$\begin{aligned} m(x, a) &= x_{1,1}\lambda_1^2 + 2x_{1,2}\lambda_1\lambda_2 + x_{2,2}\lambda_2^2 \\ m(y, a) &= y_{1,1}\lambda_1^2 + 2y_{1,2}\lambda_1\lambda_2 + y_{2,2}\lambda_2^2 \\ (m + n)(a, a) &= a_{1,1}\lambda_1^2 + 2a_{1,2}\lambda_1\lambda_2 + a_{2,2}\lambda_2^2. \end{aligned}$$

Queste sono tre relazioni lineari omogenee in m, n, 1 quindi dovrà esser nullo il determinante dei coefficienti e si avrà:

$$\begin{vmatrix} (x, a) & 0 & \sum_1^2{}_{r,s} x_{r,s}\lambda_r\lambda_s \\ (y, a) & 0 & \sum_1^2{}_{r,s} y_{r,s}\lambda_r\lambda_s \\ (a, a) & (a, a) & \delta\sum_1^2{}_{r,s} a_{r,s}\lambda_r\lambda_s \end{vmatrix} = 0,$$

ossia

$$(x, a)\sum_1^2{}_{r,s} y_{r,s}\lambda_r\lambda_s - (y, a)\Sigma x_{r,s}\lambda_r\lambda_s = 0,$$

cioè

(3) $$\sum_1^2{}_{r,s}\{(x, a)y_{r,s} - (y, a)x_{r,s}\}\lambda_r\lambda_s = 0.$$

Siano λ_1, λ_2, λ_1', λ_2' le soluzioni di (3) allora $\Sigma f_r \lambda_r$; $\Sigma f_r \lambda_r'$ sono le due direzioni di σ_1 che corrispondono alle intersezioni del cono geodetico col piano α considerato, per esse si ha:

$$(4)\qquad \begin{aligned} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_1'}{\lambda_2'} &= -\frac{2\,\{(x, a)y_{1,2} - (y, a)x_{1,2}\}}{(x, a)y_{1,1} - (y, a)x_{1,1}} \\ \frac{\lambda_1\lambda_1'}{\lambda_2\lambda_2'} &= \frac{(x, a)y_{2,2} - (y, a)x_{2,2}}{(x, a)y_{1,1} - (y, a)x_{1,1}}. \end{aligned}$$

Ora

$$\begin{aligned} \sum_{1}^{2}{}_{r,s}\, a_{r,s}\lambda_r\lambda_s &= a_{1,1}\lambda_1\lambda_1' + a_{1,2}\{\lambda_1\lambda_2' + \lambda_2\lambda_1'\} + a_{2,2}\lambda_2\lambda_2' = \\ &= a_{1,1}\{(x, a)y_{2,2} - (y, a)x_{2,2}\} - 2a_{1,2}\{(x, a)y_{1,2} - (y, a)x_{1,2}\} + \\ &\quad + a_{2,2}\{(x, a)y_{1,1} - (y, a)x_{1,1}\} = (x, a)(a, y) - (y, a)(a, x) = 0. \end{aligned}$$

Dunque le direzioni in discorso sono ortogonali ed è vero, come dicevo nella prefazione, che formano la coppia ortogonale dell'involuzione del VITALI.