Bollettino Unione Matematica Italiana

Ettore Lindner

Sull'iterazione di uno speciale tipo di funzione razionale di secondo grado

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.2, p. 79–87.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_2_79_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1930.

Sull'iterazione di uno speciale tipo di funzione razionale di secondo grado.

Nota di Ettore Lindner (a Reggio Emilia).

Sunto. - *Studiando l'iterazione della funzione* $\frac{ax^2+bx}{cx+d}$ *(ove* $|b|<|d|$, $|c|<|a|$*), si determina in questa Nota la condizione affinchè l'aggregato dei punti singolari sia dato da una circonferenza: è questo il solo caso in cui l'aggregato è di natura semplice; si dà poi qualche altra proprietà dell'aggregato stesso nel caso in cui* a, b, c, d *sono numeri reali.*

1. Dati quattro numeri complessi a, b, c, d, arbitrari, purchè verificanti le due diseguaglianze $|b|<|d|$, $|c|<|a|$, si costruisca la funzione razionale di secondo grado

$$f(x)=x\alpha(x),\quad \text{dove si è posto}\quad \alpha(x)=\frac{ax+b}{cx+d};$$

di tale funzione si considerino le successive iterate:

$$f_2(x)=f[f(x)],\quad f_3(x)=f_2[f(x)],\dots,\quad f_n(x)=f_{n-1}[f(x)],\dots,$$

le quali, come è noto, sono funzioni razionali, di gradi rispettivi $2^2, 2^3,\dots, 2^n,\dots$ verificanti la relazione $f_{m+n}(x)=f_m[f_n(x)]$ (1).

(1) P. Montel, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques*, (Paris, Gauthier-Villars), Chap. VIII, pag. 214.

Nello studio generale dell' iterazione si è rivelata l' importanza e l' utilità della considerazione di un aggregato di punti, quello dei punti nei quali la famiglia $f(x)$, $f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ delle funzioni iterate non è normale. Tale insieme di punti si suole chiamare aggregato F, e si dimostra che esso è perfetto, invariante per la sostituzione $x_1 = f(x)$ e per la sua inversa, che esso divide il piano complesso in un certo numero (che può essere soltanto 1 o 2 e può essere anche ∞) di regioni connesse (aventi come punti al contorno soltanto punti di F) nelle quali il comportamento della successione delle funzioni iterate è identico in ogni punto (regioni contigue ad F), che di esso non fa parte alcun punto interno [1].

Scopo di questa Nota è di dare, sfruttando in parte i risultati generali, qualche indicazione sulla natura dell' aggregato F nel caso considerato, e di determinare quei valori dei numeri a, b, c, d, pei quali esso ha struttura particolarmente semplice.

2. Si osservi anzitutto che la sostituzione $x_1 = f(x)$ ammette 3 punti doppi distinti: $0, \infty, \dfrac{d-b}{a-c}$; si consideri poi la circonferenza di equazione $|\alpha(x)| = 1$: essa è la circonferenza luogo dei punti le cui distanze da $-\dfrac{b}{a}$ e da $-\dfrac{d}{c}$ stanno nel rapporto $\left|\dfrac{c}{a}\right|$; nei punti x interni ad essa è $|\alpha(x)| < 1$, in quelli esterni $|\alpha(x)| > 1$. Tenendo ben presenti le diseguaglianze verificate per ipotesi, si vede subito che il punto doppio 0 è interno alla circonferenza ora considerata e che chiameremo (λ), che il punto doppio ∞ è esterno alla stessa circonferenza (λ), che il punto doppio $\dfrac{d-b}{a-c}$ appartiene a (λ).

Con centro in 0 si descrivano le due circonferenze (γ), (Γ) tangenti a (λ), e rispettivamente, interna ed esterna a (λ) stessa; mediante queste due circonferenze il piano complesso risulta diviso in tre regioni: l' interno di (γ), l' esterno di (Γ), la corona circolare compresa fra (γ) e (Γ); consideriamole separatamente.

Sia $\bar{x}$ un punto interno a (γ), e si considerino i suoi conseguenti successivi, cioè i punti $\bar{x}_1 = f(\bar{x})$, $\bar{x}_2 = f_2(\bar{x}), \dots, \bar{x}_n = f_n(\bar{x}), \dots$; poichè $\bar{x}$ è anche interno a (λ), si ha subito che tutti i punti $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \dots$ sono interni a (γ) (e a (λ)) e che è:

$$|\bar{x}| > |\bar{x}_1| > |\bar{x}_2| > \dots > |\bar{x}_n| > |\bar{x}_{n+1}| > \dots .$$

[1] P. Montel, Ibid., pag. 230 e segg.; G. Julia, *Mémoire sur l' itération...*, « Journal de Math. », 1918, nn. 23-26; P. Fatou, *Sur les équations fonctionnelles,* « Bull. Société Math. de France », 1920, n. 27.

La successione di numeri positivi $|\bar{x}|$, $|\bar{x}_1|, \ldots, |\bar{x}_n|, \ldots$ è dunque monotona e perciò regolare, sia η il suo limite. Se ξ è un generico punto limite della successione $\bar{x}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \ldots$, sarà necessariamente $|\xi| = \eta$: inoltre ξ sarà interno a (γ) (e a (λ)). D'altra parte, col metodo di induzione, si dimostra agevolmente la formula:

$$\bar{x}_n = \bar{x} \cdot \alpha(\bar{x}) \cdot \alpha(\bar{x}_1) \cdot \alpha(\bar{x}_2) \cdot \ldots \cdot \alpha(\bar{x}_{n-1}),$$

quindi si ha:

$$|\bar{x}_n| = |\bar{x}| \cdot |\alpha(\bar{x})| \cdot |\alpha(\bar{x}_1)| \cdot \ldots \cdot |\alpha(\bar{x}_{n-1})|,$$

e si può affermare che il prodotto infinito $|\bar{x}| \cdot |\alpha(\bar{x})| \ldots |\alpha(\bar{x}_n)| \ldots$ è convergente ed ha come valore η. Se fosse $\eta \neq 0$ (ed è sempre $\eta \neq \infty$), il termine generale $|\alpha(\bar{x}_n)|$ del prodotto infinito dovrebbe tendere all'unità, e si avrebbe per $(n > \bar{n})$: $1 - |\alpha(\bar{x}_n)| < \varepsilon$, ove ε è una quantità positiva arbitraria prefissata; fra gli $\bar{x}_n$ che verificano questa diseguaglianza, ve ne sono infiniti arbitrariamente prossimi a ξ (che è punto limite) e quindi tali che $\big||\alpha(\bar{x}_n)| - |\alpha(\xi)|\big| < \varepsilon$; ne segue che è $\big||\alpha(\xi)| - 1\big| < 2\varepsilon$, cioè $|\alpha(\xi)| = 1$ perchè $|\alpha(\xi)|$ è un numero determinato, ed ε è arbitrariamente piccolo, ciò è contrario al fatto che ξ è interno a (λ). Ne viene che è $\eta = 0$ e quindi $\xi = 0$, cioè: l'unico punto limite della successione $\bar{x}, \bar{x}_1, \ldots \bar{x}_n, \ldots$ quando $\bar{x}$ è interno a (γ) è l'origine.

In modo analogo si dimostra che l'unico punto limite della stessa successione, quando $\bar{x}$ è esterno a (Γ) è il punto ∞.

Si dicono punti periodici le radici delle infinite equazioni $f_n(x) = x$, e si dimostra che ogni punto di F è punto limite di punti periodici [1]. Segue da questo fatto che all'interno di (γ) e all'esterno di (Γ) non cade nessun punto di F, perchè in tali campi non può cadere nessun punto periodico (infatti i conseguenti di un tal punto non tenderebbero a 0 o ad ∞).

Dunque: i punti dell'aggregato F cadono tutti nella corona circolare limitata da (γ) e (Γ), o sul suo contorno.

Della corona circolare fa parte la circonferenza (λ); ora, si può vedere che i punti di F sono sempre parte interni e parte esterni a (λ). Infatti, si supponga invece che i punti di F siano, p. es., tutti interni a (λ) (ed eventualmente sul contorno); di F fanno parte infiniti punti periodici [2], sia $\xi = f_n(\xi) = \xi_n$ uno di essi, anche $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ appartengono ad F per l'invarianza dell'aggregato, quindi tali punti sono, come ξ, interni a (λ); ne segue che in essi è $|\alpha(x)| < 1$ e quindi che $|\xi| > |\xi_1| > |\xi_2| > \ldots > |\xi_{n-1}|$;

(1) P. Montel, *Leçons sur les familles normales...*, pag. 233.

(2) Ibid., pag. 230.

essendo anche $|\alpha(\xi_{n-1})| < 1$ risulta $|\xi_n| < |\xi_{n-1}|$ e quindi $|\xi_n| < |\xi|$ il che è assurdo perchè $\xi_n \equiv \xi$.

Analogamente si vede che i punti di F non possono essere tutti all'esterno di (Γ).

3. Da quanto precede risulta evidente l'importanza di un caso particolarissimo, quello in cui la circonferenza (λ) ha il suo centro in 0. Infatti in tale caso le due circonferenze (γ) e (Γ) coincidono entrambe con (λ) e la corona circolare già considerata si riduce al contorno (λ) stesso, in modo che si può affermare che i punti dell'aggregato F appartengono tutti alla circonferenza (λ) stessa. Di più, si vede facilmente che tutti i punti di (λ), se (λ) ha centro in 0, appartengono ad F. Infatti sia ξ un punto di (λ) e Δ sia un suo intorno circolare arbitrario; se in ξ la famiglia delle funzioni iterate fosse normale, esisterebbe una successione parziale uniformemente convergente in Δ verso una funzione meromorfa [1]; in virtù di risultati precedenti, tale funzione dovrebbe essere costantemente nulla nella parte di Δ interna a (λ), costantemente infinita nella parte esterna, e ciò non può accadere.

Dunque: se (λ) ha centro in 0, l'aggregato F coincide con (λ).

Si tratta di vedere, per quali valori di a, b, c, d, questo fatto si verifica.

Si osservi, a tale scopo, che il centro di (λ) è sempre il punto medio fra i due punti x', x'' della retta congiungente $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$ che dividono, uno internamente, l'altro esternamente, il segmento $\left(-\frac{b}{a}, -\frac{d}{c}\right)$ nel rapporto $\left|\frac{c}{a}\right|$.

Posto: $-\frac{b}{a} = m + in$, $-\frac{d}{c} = p + iq$, le coordinate u', v' di x' e quelle u'', v'' di x'' sono date da:

$$u' = \frac{p\left|\frac{c}{a}\right| + m}{\left|\frac{c}{a}\right| + 1}, \quad v' = \frac{q\left|\frac{c}{a}\right| + n}{\left|\frac{c}{a}\right| + 1}, \quad u'' = \frac{p\left|\frac{c}{a}\right| - m}{\left|\frac{c}{a}\right| - 1}, \quad v'' = \frac{q\left|\frac{c}{a}\right| - n}{\left|\frac{c}{a}\right| - 1},$$

[1] Si ricordi che: una famiglia di funzioni meromorfe si dice normale in un campo Δ quando da ogni successione costruita con funzioni della famiglia, se ne può estrarre un'altra convergente uniformemente in Δ verso una funzione meromorfa (eventualmente costante); e che una famiglia si dice normale in un punto, quando è normale in un intorno di esso. (Cfr. P. MONTEL, op. cit., pag. 124 e segg.).

quindi le coordinate del loro punto medio $\xi + i\eta$ (centro di (λ)) saranno:

$$\xi = \frac{p\left|\frac{c}{a}\right|^2 - m}{\left|\frac{c}{a}\right|^2 - 1}, \qquad \eta = \frac{q\left|\frac{c}{a}\right|^2 - n}{\left|\frac{c}{a}\right|^2 - 1};$$

il centro di (λ) è dunque il punto:

$$\frac{(p + iq)\left|\frac{c}{a}\right|^2 - (m + in)}{\left|\frac{c}{a}\right|^2 - 1} = \frac{-\frac{d}{c}\left|\frac{c}{a}\right|^2 + \frac{b}{c}}{\left|\frac{c}{a}\right|^2 - 1}.$$

Esso coincide con l'origine quando $-\frac{d}{c}\left|\frac{c}{a}\right|^2 + \frac{b}{a} = 0$ e soltanto allora, quindi il caso interessante è quello in cui i coefficienti a, b, c, d verificano la relazione:

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}\left|\frac{c}{a}\right|^2.$$

4. In generale, si dicono punti doppi attrattivi di una sostituzione $x_1 = f(x)$, quei punti x tali che $f(x) = x$ e inoltre: $|f'(x)| < 1$ se x è a distanza finita, $\left|\frac{1}{f'(x)}\right| < 1$ se x è il punto ∞. Esiste per ciascuno di tali punti una regione connessa contigua ad F che lo contiene e i cui punti hanno dei conseguenti successivi tendenti regolarmente al punto doppio; tale regione, detta dominio immediato del punto doppio contiene sempre un punto critico della funzione algebrica $f_{-1}(x)$ inversa di $f(x)$ e contiene almeno due antecedenti di ciascuno dei suoi punti, cioè due radici di tutte le equazioni $f(x) = \xi$ ove ξ è un punto generico del dominio [1].

Nel caso attuale, è immediato che 0 e ∞ sono punti doppi attrattivi; la funzione $f(x)$ è di 2° grado, quindi la sua inversa ha due soli punti critici, di cui uno sarà interno al dominio immediato D_0 di 0 (dominio di cui farà parte l'interno del cerchio (γ)) e l'altro al dominio D_∞ del punto ∞ (di cui farà parte l'esterno di (Γ)); l'equazione $f(x) = \xi$ ammette sempre due sole radici, quindi possiamo affermare che D_0 e D_∞ contengono *tutti* gli antecedenti di ciascun loro punto. Poichè, quando il dominio immediato di un

[1] P. MONTEL, op. cit, pag. 218, 230 e segg.; G. JULIA, *Mémoire sur l'itération*, « Journal de Math. », 1918 n. 36.

punto doppio attrattivo contiene tutti gli antecedenti di ciascun suo punto, i domini immediati di tutti gli altri punti doppi attrattivi sono semplicemente connessi (1), avremo che i due campi D_0, D_∞ contigui ad F sono semplicemente connessi.

Se una famiglia di funzioni meromorfe non è normale in una area, le funzioni che la compongono assumono, nel loro insieme, in quell'area, tutti i valori complessi, due al più eccettuati (2); d'altra parte in un intorno arbitrario di un punto di F la famiglia $f(x)$, $f_2(x)$,..., $f_n(x)$,... non è normale, quindi in esso cadono dei punti x tali che $f_{\bar{n}}(x) = \xi$ ove ξ è un valore qualunque e $\bar{n}$ un indice conveniente. Le radici delle equazioni $f_n(x) = \xi$ $(n = 1, 2, ...)$ sono dette antecedenti di ξ, l'intorno considerato del punto di F è arbitrariamente piccolo, quindi si ha che: ogni punto di F è punto limite per gli antecedenti di un punto qualunque ξ del piano (due al più eccettuati) (3).

Si è visto or ora che gli antecedenti dei punti di D_0 sono tutti interni a D_0, un loro punto limite sarà dunque interno o al contorno, così pure per D_∞: ne viene che i punti di F sono tutti al contorno tanto per D_0 che per D_∞. Cioè: per la funzione in esame, l'aggregato F è un'insieme continuo lineare di punti dividente il piano in due campi complementari semplicemente connessi D_0, D_∞.

Questo fatto è stato verificato direttamente per il caso in cui (λ) ha il centro in 0.

5. Al risultato otttenuto al n. 3, si può dare una portata assai maggiore applicando le considerazioni generali ora svolte e alcuni teoremi dovuti al FATOU.

Questo Autore ha dimostrato che, se il dominio immediato di attrazione di un punto doppio è semplicemente connesso, e se il suo contorno comprende un arco isolato di curva analitica, questo contorno è tutto costituito da una circonferenza (o una retta) o da un arco di circonferenza (o un segmento di retta) (4).

Il teorema è applicabile al caso in esame; se il contorno di D_0, cioè l'aggregato F, contiene un arco analitico isolato, esso coinciderà con una circonferenza (o una retta); l'aggregato F infatti non potrebbe essere un arco di circonferenza, perchè esso deve

(1) G. JULIA, Ibid., n. 45.

(2) P. MONTEL, op. cit., pag. 125.

(3) Cfr. P. MONTEL, op. cit., pag. 232.

(4) P. FATOU, *Sur les équations fonctionnelles* « Bull. Soc. Math. de France », 1920, n. 43.

dividere il piano in due regioni. La circonferenza F risulta invariante per la sostituzione $x_1 = f(x)$ e per la sua inversa, così pure le due regioni D_0, D_∞ in cui essa divide il piano, quindi la sostituzione $x_1 = f(x)$ è una di quelle che il FATOU ha chiamato sostituzioni a cerchio fondamentale. Si dimostra abbastanza facilmente che se una di tali sostituzioni possiede due punti doppi attrattivi, essi sono uno interno e uno esterno alla circonferenza invariante e sono immagine l'uno dell'altro rispetto ad essa [1]. Nel caso attuale, già si sa che 0 e ∞ sono punti doppi attrattivi, affinchè essi possano essere immagine uno dell'altro rispetto alla circonferenza invariante, occorre che questa abbia il suo centro in 0. D'altra parte, a meno che (λ) stessa non abbia il centro in 0, non può esistere nessuna circonferenza di centro 0 invariante giacchè essa avrebbe certamente dei punti interni (o dei punti esterni) a (λ) e per tali punti x il conseguente x_1 è tale che $|x_1| < |x|$ e quindi non può appartenere alla circonferenza di centro 0 che non risulterebbe perciò invariante.

Riassumendo: l'aggregato F contiene un arco analitico isolato soltanto se (λ) ha il centro 0, cioè soltanto se i coefficienti di $f(x)$ sono tali che: $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}\left|\frac{c}{a}\right|^2$.

In base ad un altro teorema di FATOU si può anche affermare che, se la relazione ora scritta non è verificata, la curva F, contorno comune di D_0 e D_∞, non ha tangente in alcun punto.

Il caso in cui i numeri a, b, c, d verificano l'eguaglianza $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}\left|\frac{c}{a}\right|^2$, è dunque il solo per il quale l'aggregato F abbia una natura semplice.

6. Quando i quattro numeri dati sono reali, la relazione precedente assume forma più semplice, giacchè, essendo allora $\left|\frac{c}{a}\right| = \pm\frac{c}{a}$, essa si scrive: $ab = cd$.

Nel caso della realità dei numeri, si può dare qualche indicazione sull' aggregato F anche se non si è nel caso semplice. Anzitutto (λ) ha sempre il suo centro sull' asse reale, perchè tale asse è la retta congiungente $-\frac{b}{a}$ e $-\frac{d}{c}$; l'asse reale è invariante perchè il conseguente di un punto reale è sempre reale. I punti periodici, radici delle equazioni $f_n(x) = x$, non potendo appartenere nè a D_0,

(1) P. FATOU, *Sur les équations fonctionnelles* « Bull. Soc. Math. de France », 1919, n. 16.

nè a D_∞, appartengono ad F, e poichè le equazioni che li originano sono a coefficienti reali, essi sono o reali, a due a due coniugati. È stato dimostrato (1) che F è l'aggregato derivato dell'insieme dei punti periodici che ad esso appartengono, quindi nel caso attuale si può affermare che l'aggregato F è simmetrico rispetto all'asse reale (dalla simmetria dei punti periodici risultando quella dei loro punti limiti).

In particolare appartiene ad F il punto doppio $\frac{d-b}{a-c}$, e così pure il suo antecedente che è il punto $-\frac{d}{a}$; se si ricercano gli antecedenti di $-\frac{d}{a}$ si ottengono due punti che (si verifica con un calcolo semplice) appartengono alla circonferenza (λ).

Con un procedimento dovuto al FATOU (2) si potrebbe dimostrare che i due punti $\frac{d-b}{a-c}$, $-\frac{d}{a}$ sono i soli punti reali che appartengono a F; rimangono così individuati i due segmenti reali appartenenti a D_0 e a D_∞.

Se si considera l'equazione $f_2(x) = x$ e si sopprimono in essa i fattori relativi alle sue radici 0, $\frac{d-b}{a-c}$, si ottiene un'equazione di 2° grado il cui discriminante è negativo; essa ammette dunque radici complesse coniugate corrispondenti a 2 punti di cui ciascuno è il conseguente dell'altro: tali punti x, x_1 appartengono alla circonferenza (λ): infatti se fosse, p. es., $|\alpha(x)| < 1$, sarebbe anche $|\alpha(x_1)| < 1$ perchè x_1 è il coniugato di x, e perciò $|\alpha(x)\alpha(x_1)| < 1$ e anche $|x\alpha(x)\alpha(x_1)| < |x|$, cioè $|f_2(x)| < |x|$ mentre è $f_2(x) = x$. Si hanno così 5 punti appartenenti all'intersezione di F con (λ) e cioè: il punto doppio $\frac{d-b}{a-c}$, le due radici di $f(x) = -\frac{d}{a}$, le due radici di $f_2(x) = x$ che non sono punti doppi.

7. Terminando, si può osservare che, ad una funzione del tipo studiato, ci si può ricondurre tutte le volte che si debba studiare l'iterazione di una funzione razionale di 2° grado $\frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{\alpha' x^2 + \beta' x + \gamma'}$ ammettente due punti doppi attrattivi distinti e un terzo punto doppio non attrattivo. Infatti, operando su x_1 e su x una stessa omografia

(1) P. MONTEL, op. cit., pag. 234.

(2) P. FATOU, *Sur les équations fonctionnelles* « Bull. Soc. Math. de France », 1920, n. 37.

conveniente, si può trasformare la sostituzione $x_1 = \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{\alpha' x^2 + \beta' x + \gamma'}$ in un'altra fra le nuove variabili y_1, y della forma $y_1 = \frac{ay^2 + by}{cy + d}$ con $|b| < |d|$ e $|c| < |a|$. Precisamente l'omografia da effettuarsi deve essere tale da trasportare i due punti doppi attrattivi in 0 e all'infinito. La nuova relazione $y_1 = f(y)$ dovendo essere di 2° grado ed avere come punti doppi 0 e ∞ sarà necessariamente della forma $y_1 = \frac{ay^2 + by}{cy + d}$, e, dovendo i due punti doppi essere attrattivi, saranno verificate le due diseguaglianze.