Bollettino Unione Matematica Italiana

Mauro Picone

Sai moto dei gravi nell'atmosfera

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.2, p. 96–102.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_2_96_0>

Sul moto dei gravi nell'atmosfera.

Nota di MAURO PICONE (a Napoli) (*).

Sunto. - *Si stabiliscono dapprima le proprietà essenziali del moto dei gravi nell'atmosfera lasciando alla resistenza da questa opposta la maggiore generalità possibile; infine si studia, in ipotesi particolari, il comportamento della grandezza della velocità lungo la traiettoria e il comportamento di questa al variare della velocità iniziale e dell'angolo di proiezione. I risultati esposti trovansi fra quelli conseguiti dall'Autore fin dal 1918 nelle sue ricerche di Balistica per il perfezionamento nella tecnica del tiro dell'Artiglieria italiana nella guerra mondiale: cfr. la conferenza dell'Autore:* L'artiglieria italiana nella guerra mondiale, *in « Esercitazioni matematiche » del Circolo matematico di Catania, e l'articolo del generale* ROBERTO SEGRE: La contropreparazione nella battaglia del Piave, *nel « Corriere della Sera » del 18 gennaio 1930.*

. . . .

La lettura, che ho avuto occasione di fare soltanto in questi giorni, delle pagine dedicate allo studio qualitativo delle soluzioni delle equazioni del moto dei gravi nell'atmosfera, nelle *Lezioni di Meccanica razionale*, dovute (¹) a Lei e al prof. UGO AMALDI, mi ha richiamato alla mente un metodo assai semplice, per compiere detto studio, che avevo seguito nelle mie prime ricerche di Balistica fatte durante la guerra, e che parmi soddisfacente anche dal punto di vista del più stretto rigore analitico.

Con tale metodo quello che v'è d'essenziale nelle proprietà qualitative, geometriche e cinematiche, di dette soluzioni si può stabilire lasciando alla resistenza opposta dall'atmosfera la maggiore generalità possibile; ed è sopratutto il desiderio di comunicarLe questa circostanza — che giudico notevole — che m'induce ad esumare dalle mie vecchie carte quel metodo.

In queste vi ho trovato anche un'analisi del comportamento della grandezza della velocità lungo la traiettoria e del comportamento di questa al variare della velocità iniziale, con la quale avevo in quel tempo ritrovato assai semplicemente risultati già noti e conseguito dei nuovi che forse meritano pur essi d'esser rilevati, e porrò pertanto fine alla presente esponendoLe rapidamente anche l'analisi indicata.

(*) Da una lettera al prof. TULLIO LEVI-CIVITA.

(¹) TULLIO LEVI-CIVITA e UGO AMALDI, *Lezioni di Meccanica razionale.* [Zanichelli (Bologna)], vol. II, parte 1ª, § 3 del Cap. II.

1. **Proprietà geometriche e cinematiche del moto nell'ipotesi più generale per la resistenza.** — Si riferisca lo spazio ad un sistema di tre assi x, y, z, mutuamente ortogonali, di origine nella posizione iniziale O del punto materiale P mobile, nell'atmosfera, sotto l'azione della gravità, che supporremo costantemente uguale alla gravità in O, di grandezza g. L'asse y abbia la direzione di questa e verso contrario e l'asse z sia volto verso la sinistra di un osservatore che, portato dal piano (x, z), guardi nella direzione e nel verso dell'asse x. Designeremo con

$$f(t, x, y, z, x', y', z')$$

la più arbitraria funzione reale, finita e continua, delle variabili reali t, x, y, z, x', y', z', definita per ogni sistema di valori per queste variabili, *dotata delle derivate parziali del primo ordine, pur esse finite e continue, e sempre positiva quando sia*

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 > 0.$$

Dette: v la grandezza della velocità del punto P; x, y, z le coordinate di P; x', y', z' le componenti della velocità di P, supporremo che la resistenza opposta al moto di P dall'atmosfera abbia grandezza

$$F(t, x, y, z, x' y' z') = vf(t, x, y, z, x', y', z'),$$

direzione della velocità di P e verso contrario. Il moto di P avviene, com'è noto e subito visto, nel piano verticale per O, parallelo alla velocità iniziale e perciò, se si assume l'asse x in questo piano, si avrà sempre $z \equiv z' \equiv 0$. Porremo

$$f(t, x, y, 0, x', y', 0) = f(t, x, y, x', y'),$$

e supporremo inoltre l'esistenza di una funzione $\Phi(x, y, x', y')$ delle quattro variabili x, y, x', y', definita per quali si vogliano valori di queste, finita e continua, tale che si abbia sempre

$$f(t, x, y, x', y') < \Phi(x, y, x', y'). \tag{1}$$

Le equazioni caratterizzanti il moto di P nel piano (x, y) sono le seguenti:

$$\left\{\begin{array}{l} x'' = -fx', \quad y'' = -g - fy', \\ x(0) = y(0) = 0, \quad x'(0) = V_x, \quad y'(0) = V_y, \end{array}\right. \tag{2}$$

designando dunque con V_x e V_y le componenti della velocità iniziale impressa al punto P.

Per fissare le idee studieremo, in un primo momento, il moto di P supponendo che sia

$$V_x > 0, \quad V_y > 0.$$

Sia $(0, \Lambda)$ $(\Lambda \leq +\infty)$ il massimo intervallo di tempo, *aperto a destra*, in cui è possibile definire una soluzione (x, y) delle (2). Dalle (2) si ricava:

$$\frac{dx'^2}{dt} = -2fx'^2, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}(y'^2 + 2gy) = -2fy'^2, \tag{4}$$

$$y''x' - x''y' = -gx', \tag{5}$$

$$y''(t) \leqq -g, \quad \text{quando} \quad y'(t) \geqq 0. \tag{6}$$

Dalla (3) segue che: La componente orizzontale x' della velocità di P è funzione non crescente e non negativa di t e, nel caso dell'analiticità di f, decrescente e positiva. Ed invero, non possono verificarsi che i due casi seguenti: O è sempre $x'(t) \neq 0$ in $(0, \Lambda)$, oppure esiste ivi un primo punto λ per cui è $x'(\lambda) = 0$. Nel primo caso, poichè $x'(0) > 0$, sarà sempre $x'(t) > 0$ e, per la prima delle (2), $x'(t)$ sempre decrescente. Nel secondo caso, sarà $x'(t) > 0$ per $0 \leqq t < \lambda$ e quindi $x'(t)$ positiva e decrescente nell'intervallo $(0, \lambda)$ aperto a destra, identicamente nulla per $t \geqq \lambda$. Questo secondo caso si può già escludere nell'ipotesi dell'analiticità di f, poichè allora risulterebbe $x'(t) \equiv 0$ per ogni valore di t, contro l'ipotesi $x'(0) > 0$.

Dalla (5) segue che [1]: La traiettoria volge sempre la concavità verso il basso, nella parte di essa percorsa da P al variare di t nell'intervallo $(0, \lambda)$, ed è rettilinea e verticale nell'eventuale parte rimanente.

La (6) ci dice che $y'(t)$ è decrescente tutte le volte che essa è positiva o nulla, essa, pertanto, non può essere nulla che, al più, in un punto, e poichè in un intorno destro dello zero riesce $y'(t) > 0$, si avrà $y'(t) > 0$ a sinistra di un eventuale punto t_0 dell'intervallo $(0, \Lambda)$ ove riesca $y'(t_0) = 0$, per essere poi sempre a destra $y'(t) < 0$.

La (4) ci dice che $y'^2 + 2gy$ non è mai crescente. Per quanto precede possiamo affermare che i limiti

$$\lim x, \quad \lim x', \quad \lim y, \quad \lim (y'^2 + 2gy), \qquad \text{per } t \to \Lambda, \tag{7}$$

riescono, ciascuno, ben determinati e che

$$\lim x' = \text{quantità finita non negativa}, \quad \lim x > 0,$$
$$\lim (y'^2 + 2gy) < +\infty \quad \text{e quindi} \quad \lim y < +\infty.$$

(1) Cfr. PICONE, *Lezioni d'Analisi infinitesimale*. [« Circolo Matematico di Catania », Catania, R. Università (1923)], p. 178 del vol. I.

Uno almeno dei limiti (7) deve risultare infinito; poichè, se così non fosse, nel caso $\Lambda < +\infty$, l'intervallo $(0, \Lambda)$ non sarebbe il massimo intervallo, aperto a destra, nel quale è possibile definire la soluzione (x, y) delle (2), nel caso $\Lambda = +\infty$, dovrebbe risultare $\lim x' = \lim y' = 0$, e quindi, in virtù della (1) e della seconda della (2), $\lim y'' = -g$, ora è assurdo che, con $\lim y'' = -g$, riesca $\lim y' = 0$.

Dico che

$$\lim_{t \to \Lambda} y(t) = -\infty. \tag{8}$$

Ed invero, supponiamo, in primo luogo, $\lim x$ finito. Dovrà allora risultare o

$$\lim y = -\infty \quad \text{oppure} \quad \lim (y'^2 + 2gy) = -\infty,$$

ma anche nella seconda ipotesi riuscirà $\lim y = -\infty$.

Sia, in secondo luogo, $\lim x$ infinito. Dovrà allora essere $\Lambda = +\infty$ e sempre $x'(t) > 0$, e sarà perciò lecito considerare la y come funzione di x, definita in tutto l'intervallo $(0, +\infty)$ dell'asse della x, dotata ivi di derivata $\eta(x)$ finita e continua. Si ha:

$$\eta(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)},$$

e quindi $\eta(x)$, in virtù della (5), riesce sempre decrescente al crescere di t, cioè di x. Esiste dunque ben determinato anche il limite $\lim \eta(x)$ (per $x \to +\infty$). Se fosse finito $\lim y$ dovrebbe perciò essere $\lim \eta(x) = 0$, e quindi sempre $\eta(x) > 0$, $y'(t) > 0$. Dalle (2) si deduce allora

$$x < V_x t, \quad y < V_y t - \frac{1}{2} g t^2,$$

cioè l'assurdo che la curva $y = y(x)$, provvista di un asintoto orizzontale, dovrebbe sempre mantenersi al disotto di una (ben nota) parabola ad asse verticale con la concavità volta verso il basso.

Stabilita così, in ogni caso, la (8), poichè in un intorno destro dello zero riesce $y(t) > 0$, se ne deduce l'esistenza di un punto T dell'intervallo $(0, \Lambda)$ per cui è $y(T) = 0$, e quindi di un punto t_0 interno all'intervallo $(0, T)$ in cui è nulla y', laddove risulterà

$$y'(t) > 0, \text{ per } 0 \leqq t < t_0, \quad y'(t) < 0, \text{ per } t > t_0.$$

Dico che è $t_0 < \lambda$. Ed invero, se fosse $\lambda < t_0$, riuscirebbe $y'(\lambda) > 0$, $\lim (y'/x')$ (per $t \to \lambda - 0) = +\infty$, ciò che non è possibile per la decrescenza del rapporto y'/x' nell'intervallo $(0, \lambda)$. Se fosse $\lambda = t_0$, riuscirebbe $y'(\lambda) = 0$ e di nuovo

$$\lim \frac{y'}{x'} = \lim \frac{y''}{x''} = \lim \frac{g + fy'}{fx'} = +\infty.$$

Si ha dunque $y' = 0$ nel solo punto t_0, $x' = 0$ per tutti e soli i punti (eventuali) dell'intervallo (λ, Λ), al quale è però esterno il punto t_0, onde possiamo concludere che:

La grandezza v della velocità di P si mantiene sempre diversa da zero in tutto l'intervallo $(0, \Lambda)$ e perciò la traiettoria di P è dotata ovunque di tangente ben determinata, variabile con continuità, con coefficiente angolare non crescente. Indicheremo con θ la misura, compresa fra $-\pi/2$ e $\pi/2$, dell'angolo d'inclinazione dell'asse della velocità sull'asse x, che diremo, semplicemente, *inclinazione* della traiettoria. Porremo $\theta(0) = \varphi$. L'inclinazione iniziale $\theta(0)$ della traiettoria sarà detta anche *angolo di proiezione*.

Abbiamo stabilito, in ciò che precede, che l'inclinazione θ o decresce sempre al crescer del tempo nell'intervallo $(0, \Lambda)$, oppure, quando ivi esista il punto λ, decresce sempre nell'intervallo $(0, \lambda)$, per raggiungere il valore $-\pi/2$ in λ, valore che conserva nel rimanente intervallo (λ, Λ).

Assicurato che è sempre $v \neq 0$, posto $v(0) = V$, le equazioni (2) forniscono, in tutto l'intervallo $(0, \Lambda)$

$$(9) \qquad \begin{cases} v' = -F(t, x, y, v\cos\theta, v \operatorname{sen}\theta) - g \operatorname{sen}\theta, \\ \theta' = -g\dfrac{\cos\theta}{v}, \quad x' = v\cos\theta, \quad y' = v\operatorname{sen}\theta, \\ x(0) = y(0) = 0, \quad \theta(0) = \varphi, \quad v(0) = V, \end{cases}$$

e possiamo ora dimostrare che, in ogni caso, la traiettoria non è mai dotata del finale tratto verticale, del quale abbiamo potuto escludere l'esistenza soltanto nell'ipotesi dell'analiticità di f, possiamo cioè escludere l'esistenza del valore λ di t per cui riesce $x'(\lambda) = 0$, $\theta(\lambda) = -\pi/2$. Ed invero, se un tale valore esistesse, detto m il minimo di v in $(0, \lambda)$, riuscirebbe $m > 0$ e, per ogni θ interno all'intervallo $(0, \lambda)$,

$$\lambda > t = \int_0^{\varphi} \frac{v}{g}\frac{d\theta}{\cos\theta} > \frac{m}{g}\left[\log\operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \log\operatorname{tang}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right],$$

onde si perverrebbe all'assurdo

$$\lambda \geqq \lim_{\theta \to \frac{-\pi}{2}} \left\{ \frac{m}{g} \left[\log \operatorname{tang} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \log \operatorname{tang} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\}.$$

Si ha dunque infine il teorema:

I. *La traiettoria del punto* P, *nel moto definito dalle equazioni* (2), *volge in ogni suo punto la concavità verso il basso, la componente orizzontale della velocità è sempre positiva e decrescente al crescer del tempo e l'inclinazione* θ *è pur essa sempre decrescente, dal valore positivo che ha all'inizio, per divenire negativa, mantenendosi però sempre maggiore di* $-\pi/2$.

Dalla decrescenza di x' e di $y'^2 + 2gy$ si traggono poi, al modo consueto, tutte le ulteriori proprietà geometriche e cinematiche del moto nei punti della traiettoria di eguale quota. Dalla prima delle (9) si deduce che:

II. *Al crescer del tempo, la grandezza della velocità decresce nel ramo ascendente della traiettoria, ed anche, dopo il vertice, per un certo tratto del ramo discendente.*

2. **Ipotesi più particolari della resistenza.** — Non pare che le note proprietà del comportamento della grandezza della velocità, stabilite nell'ipotesi che la resistenza dipenda solo da questa grandezza e ne sia funzione crescente, continuino a sussistere quando ci si metta nelle ipotesi generali del numero precedente.

In ipotesi più particolari si ha però il teorema:

III. *Se la funzione* F *dipende esplicitamente soltanto dalle variabili* t, x, x', v, *ed è sempre*

$$\frac{\partial F}{\partial t} \leqq 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} \leqq 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x'} \geqq 0,$$

allora, al crescer del tempo, la grandezza v(t) *della velocità decresce sempre fino ad un (eventuale) valore di* t, *maggiore di* t_0, *per poi divenire e rimanere crescente.*

Derivando invero la prima delle (9) rispetto al tempo, e tenendo conto della seconda, si trova:

$$v'' = -F_t - F_x x' - F_{x'} x'' - F_v v' + g^2 \frac{\cos^2 \theta}{v},$$

ne segue che $v'' > 0$ quando $v' = 0$, e quindi che v' è crescente in ogni suo punto di zero, essa non può dunque avere che, al più, un punto di zero $t_1 > t_0$ e sarà sempre negativa prima di t_1, sempre positiva dopo t_1.

Quanto all'effettiva esistenza dal considerato eventuale minimo di v, ove si lasci alla F l'attuale generalità, si può dire soltanto che:

IV. *Se, comunque si diano* φ *e* V *verificanti le limitazioni*

$$0 \leqq \varphi < \pi/2, \quad 0 < V, \tag{10}$$

si ha sempre $\Lambda(\varphi, V) = +\infty$, *ed esiste una particolare coppia* (φ_0, V_0) *di tali valori di* φ *e di* V, *per i quali* v(t) *consegue il suo minimo, ciò avviene per qualunque coppia di valori di* φ *e di* V *verificanti le* (10).

Ed invero, concepite v e v' come funzioni di t, φ e V, esse sono finite e continue con le loro derivate parziali prime, rispetto a t, φ, V, nell'insieme definito dalle limitazioni:

$$0 \leqq \varphi < \pi/2, \quad 0 < V, \quad 0 \leqq t.$$

Si abbia ora, in un punto (t_{10}, φ_0, V_0) di tale insieme,

$$v'(t_{10}, \varphi_0, V_0) = 0,$$

poichè, tutte le volte che riesce, nel detto insieme,

$$v'(t_1, \varphi, V) = 0, \tag{11}$$

si ha pure

$$t_1 > 0, \quad v''(t_1, \varphi, V) > 0,$$

l'elementare teoria delle funzioni implicite assicura che la (11) definisce t_1 come funzione delle variabili φ e V, per i valori di queste verificanti le (10).

(continua)