Bollettino Unione Matematica Italiana

Corradino Mineo

Sul modo di variare dell'energia d'accelerazione nel moto maggiormente impedito

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.3, p. 148–151.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_3_148_0>

Sul modo di variare dell'energia d'accelerazione nel moto maggiormente impedito.

Nota di CORRADINO MINEO (a Palermo).

Sunto. - *Si ritorna sull'argomento di una Nota precedente per completare un calcolo e aggiungere qualche altra considerazione.*

1. In una precedente Nota ([2]), mi sono occupato d'un teorema del GUGINO sul così detto *effetto cineto-dinamico*, relativo al moto d'un sistema materiale a vincoli privi d'attrito e indipendenti dal tempo. Sia M la posizione d'un generico punto, di massa m; N, la posizione dello stesso punto nell'istante $t+\tau$: l'effetto in discorso è $\Sigma m \overline{MN}^2$, per il quale si ha *fino ai termini di 4° grado in* τ:

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad \Sigma m \overline{MN}^2 \cong\; & \tau^2 \Sigma m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \tau^3 \Sigma m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) + \\
& + \frac{\tau^4}{4} \Sigma m(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2) + \frac{\tau^4}{3} \Sigma m(\dot{x}\dddot{x} + \dot{y}\dddot{y} + \dot{z}\dddot{z}).
\end{aligned}
$$

L'ultimo termine del secondo membro, dipendente dalle derivate terze delle coordinate, era stato omesso dal GUGINO ([3]): della

([2]) Vedi MINEO, *Di una interpretazione del principio del minimo sforzo di Gauss.* « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », anno VIII (1929), pp. 260-261.

([3]) Cfr. GUGINO, *Sulla validità ed estensione del teorema del massimo effetto,* « Rend. Acc. Lincei », 1929 (VIII), pp. 405-413. Dichiaro volentieri che in questa Nota l'A., oltre a correggere la svista segnalatagli dal CARTAN, precisa meglio, indipendentemente dalla mia Nota citata, la validità del teorema in questione.

quale omissione, in verità, io non m'era accorto. Se bene questo fatto non cambi le considerazioni da me fatte in quella Nota, sono costretto a tornare sull' argomento per chiarire qualche altro punto e aggiungere qualche nuova considerazione.

2. Si tratta di stabilire in quali casi il secondo membro della (1) abbia una proprietà di massimo, *rispetto a qualsivoglia moto maggiormente impedito:* intendendo con ciò qualunque altro moto *reale* del sistema che per posizioni e velocità si raccordi nell' istante t col primitivo, effettuandosi, *cæteris paribus,* per l' aggiunta, nel predetto istante, di nuovi opportuni vincoli indipendenti dal tempo ([1]).

È bene notare che non convien dire che il massimo abbia luogo *per* τ *sufficientemente piccolo,* quasi a significare che esista un numero positivo ε tale che per $\tau < \varepsilon$ l' effetto cineto-dinamico *completo* sia massimo rispetto a ogni moto maggiormente impedito: in realtà il secondo membro di (1) è massimo (quando è tale) *comunque si fissi* τ; ma l' effetto cineto-dinamico è massimo *a meno di termini del* 5° *grado in* τ. Allo stesso modo la costrizione gaussiana (in un campo ben più vasto di variabilità) non è minima se non a meno di termini del 5° grado in τ (salvo casi particolari in cui è minima *qualunque sia* τ).

3. Il punto che va chiarito è questo. Se tutto si fosse ridotto all' anzidetta omissione, per salvare il teorema, sarebbe bastato cambiare la definizione di effetto cineto-dinamico. Ma anche rinunziando a questo estremo rimedio e lasciando il 2° membro della (1) come espressione definitrice, il teorema avrebbe dovuto sussistere per tutti quei moti nei quali (essendo verificate le altre condizioni) i punti del sistema hanno tutti accelerazioni costanti: il che non è senza ulteriori restrizioni. La non validità delle conclusioni dipende dal fatto che non si può, *quando le velocità al tempo* t *non sono tutte nulle,* prendere come componenti dello spostamento virtuale del generico punto quelle dello spostamento reale (vincoli indipendenti dal tempo) *sotto la forma*

$$\tau\dot{x} + \frac{\tau^2}{2}\ddot{x}, \quad \tau\dot{y} + \frac{\tau^2}{2}\ddot{y}, \quad \tau\dot{z} + \frac{\tau^2}{2}\ddot{z}.$$

Le componenti dello spostamento virtuale vanno prese sotto

([1]) Per nuovi vincoli persistenti, introdotti bruscamente, senza raccordo di velocità, la proprietà di massimo del secondo membro di (1) è senz' altro manifesta, come già notai, in conseguenza del teorema di Carnot.

la forma $\tau\dot{x}$, $\tau\dot{y}$, $\tau\dot{z}$; e si sa già che così facendo non si deduce altro che il teorema delle forze vive.

4. Trattandosi di sistemi a vincoli indipendenti dal tempo, non è del resto necessario ricorrere al principio dei lavori virtuali: conviene procedere altrimenti per scoprire qualche altro caso (del quale ci sono esempi classici) di validità del teorema.

Per il teorema delle forze vive si ha:

$$\Sigma(X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}) = \Sigma m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}). \tag{2}$$

Se si deriva la (2) rispetto al tempo, *nell'ipotesi di accelerazioni costanti e di forze non dissipative* (cioè non dipendenti dalle velocità), si ottiene, *qualunque sia l'istante* t:

$$\Sigma m(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2) = \Sigma(X\ddot{x} + Y\ddot{y} + Z\ddot{z}) + F, \tag{3}$$

essendo F una funzione dipendente soltanto dalle coordinate, dalle velocità e dal tempo.

Poniamo

$$\Gamma = \frac{1}{2}\Sigma m(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2) - \Sigma(X\ddot{x} + Y\ddot{y} + Z\ddot{z}). \tag{4}$$

Nelle ipotesi predette, la (1) si può scrivere, per le (2), (3) e (4):

$$\left\{\begin{aligned} &\Sigma m\overline{MN}^2 \backsimeq \tau^2\Sigma m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \tau^3\Sigma(X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}) + \\ &\quad + \frac{\tau^4}{4}\Sigma m(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2) = \tau^2\Sigma m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \\ &\quad + \tau^3\Sigma(X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}) + \frac{\tau^4}{2}F - \frac{\tau^4}{2}\Gamma. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Che Γ sia minima nel moto reale, in un campo più vasto che non sia quello dei moti maggiormente impediti, è stato notato dall'APPELL: peraltro questo fatto è anche una immediata conseguenza del principio del minimo sforzo, dacchè $\frac{\tau^4}{2}\Gamma$ non differisce, se non per termini indipendenti dalle accelerazioni, dalla costrizione gaussiana.

Per conseguenza Γ è, *in particolare*, minima rispetto a qualunque moto maggiormente impedito; epperò il secondo membro di (5) è massimo nelle stesse condizioni, qualunque sia l'istante t. Ecco un altro caso di validità del teorema notevole per esempi notissimi.

Il teorema è poi vero senz'altro *a partire dalla quiete*, cioè nell'ipotesi che le velocità siano tutte nulle nell'istante t; perchè si deduce allora dalle (2), *per l'istante* t:

$$\Sigma m(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2) = \Sigma(X\ddot{x} + Y\ddot{y} + Z\ddot{z}).$$

Segue quindi facilmente il teorema del così detto *massimo effetto iniziale.*

È da notare che in ogni caso codesto effetto è massimo insieme con l'energia d'accelerazione: ora che in simili casi l'energia d'accelerazione decresca nel moto maggiormente impedito era stato già notato in molti classici esempi.

5. Tutto questo era da prevedere. Alla questione di sapere che cosa accada nel moto maggiormente impedito la risposta era stata già data: *cresce la costrizione.*

È un fatto particolarissimo logicamente deducibile dal principio di GAUSS, ma che in realtà lo ha storicamente preceduto.

In casi peculiarissimi diminuisce un altro *quid,* che il GUGINO chiama *effetto cineto-dinamico*; ma questi teoremi particolarissimi di massimo effetto non possono, mi sembra, costituire una *nuova interpretazione* (vorrei dire *per accidens*) del principio di GAUSS, nè tanto meno possono fornire un nuovo modo di risolvere i problemi dinamici.

Il GUGINO ha infatti cambiato la definizione di effetto cineto-dinamico. L'effetto cineto-dinamico *sensu lato* è definito dalla funzione

$$\text{(a)} \qquad \tau^2 \Sigma m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \tau^3 \Sigma(X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}) - \frac{\tau^4}{2}\Gamma.$$

Più semplicemente, poichè le due prime sommatorie non servono, si può definirlo per mezzo della funzione $-\frac{\tau^4}{2}\Gamma$, che anch'essa, nei casi particolari predetti, si riduce all'effetto cineto-dinamico *sensu stricto.*

Comunque, la (a) è massima nel moto reale, perchè, essendo $\frac{\tau^4}{2}\Gamma$ (costrizione gaussiana, in fondo) minima, la sua opposta è massima. La proprietà di massimo dell'opposta della costrizione gaussiana si può naturalmente dimostrare direttamente (nè più nè meno come si dimostra la proprietà di minimo della costrizione gaussiana); e, senza dubbio, se ne può dedurre il principio di GAUSS, il principio della direttissima, il teorema dell'APPELL, ecc.