BENIAMINO SEGRE

Sulla quartica osculatrice in un punto ad una curva sghemba

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.3, p. 159–162.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_3_159_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1930.

Sulla quartica osculatrice in un punto ad una curva sghemba.

Nota di BENIAMINO SEGRE (a Roma).

Sunto. - *Fra i diversi modi di estendere il concetto di circolo osculatore per le curve sghembe, quando si passa da tre a quattro punti infinitamente vicini, se ne segnala uno particolarmente semplice, che conduce ad una quartica sghemba razionale.*

La lettura di una recente interessante Memoria dei prof.i T. LEVI-CIVITA e G. FUBINI (1) mi ha suggerito alcune osservazioni elementari, che qui mi permetto di esporre.

1. **Il cono osculatore.** — *Fra i vari coni rotondi col vertice in un punto* P *ordinario di una curva sghemba* C, *ve ne è* **uno** *ben determinato — detto cono osculatore — che ha ivi colla* C *incontro 5-punto.*

Per provarlo, basta, preso P come origine delle coordinate cartesiane ortogonali, assumere le equazioni di C sotto la forma canonica:

$$1)\qquad \begin{aligned} x &= s - \frac{c^2}{6}s^3 + \ldots \\ y &= \frac{c}{2}s^2 + \frac{c'}{6}s^3 + \ldots \\ z &= -\frac{c\tau}{6}s^3 + \ldots \text{ (2)}. \end{aligned}$$

(1) T. LEVI-CIVITA e G. FUBINI, *Sulle curve analoghe al circolo osculatore quando si passa da tre a quattro punti infinitamente vicini.* « Annali di Matematica », serie 4ª, t. VII (1929), p. 193.

(2) Cfr. Mem. cit. in (1), formule (6.5), p. 205; s rappresenta l'arco misurato a partire da P, c e τ sono rispettivamente curvatura e torsione di C in P, c' è la derivata della curvatura rispetto all'arco calcolata nel punto P, ed infine gli assi costituiscono il triedro principale di C relativo a P.

Un cono rotondo col vertice in P, il cui asse abbia i coseni direttori proporzionali ad α, β, γ, si può rappresentare colla:

$$(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0;$$

sostituendo nel primo membro di questa equazione alle x, y, z gli sviluppi (1), ed annullando i coefficienti di s^2, s^3, s^4, si vengon a determinare univocamente le α, β, γ; e ciò dimostra l'asserto. Precisamente si ha in tal guisa

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -\frac{3}{4}\frac{c}{\tau},$$

e quindi il cono osculatore ha per equazione:

$$(2) \qquad \left(x - \frac{3}{4}\frac{c}{\tau}z\right)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0;$$

il suo asse r sta nel piano rettificante, e forma colla retta tangente t in P alla C (che coincide coll'asse delle x), un angolo che ha per tangente $-\frac{3}{4}\frac{c}{\tau}$. Tutto ciò trovasi già stabilito in modo assai meno semplice, in un trattato di G. SCHEFFERS ([3]).

Il cono osculatore può dirsi il cono rotondo col vertice in P, che contiene altri tre punti consecutivi di C; esso è sempre distinto dal cono rotondo — introdotto dal SAINT-VENANT ([4]) — che tocca i piani osculatori a C in P ed in due punti consecutivi: quest'ultimo ha per asse la retta rettificante (di equazioni $y = 0$, $cx + \tau z = 0$), ed ha in P colla C incontro solo 4-punto.

2. La quartica osculatrice. — Il cono osculatore e la sfera osculatrice in P a C, si segano lungo *una quartica sghemba razionale,* K, *bitangente all'assoluto e passante doppiamente per* P. K è simmetrica rispetto al piano passante per l'asse r del cono e pel centro O della sfera, e *dei due rami con cui passa per* P, *uno contiene altri tre punti di* C *consecutivi a* P. Detta curva fornisce dunque un modo di estendere il concetto di circolo osculatore, quando si passa da tre a quattro punti infinitamente vicini: ed è subito visto che — similmente a ciò che accade pel circolo osculatore — essa è caratterizzata dal suo comportamento nel punto P e nei riguardi dell'assoluto.

([3]) G. SCHEFFERS, *Einführung in die Theorie der Curven in der Ebene und im Raume,* (Leipzig, Veit, 1901), p. 257.

([4]) Cfr. B. HOSTINSKY, *Sur un théorème analogue au théorème de Meusnier,* « Nuov. Ann. de Math. », 4e série, t. IX (1909), p. 399.

Analiticamente la curva K si determina associando all'equazione (2) del cono osculatore, quella:

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2}{c}\left(y + \frac{c'}{c\tau} z\right) = 0$$

della sfera osculatrice; una di queste due può venir sostituita dalla seguente loro combinazione lineare:

$$\left(x - \frac{3}{4}\frac{c}{\tau} z\right)^2 - \frac{2}{c}\left(y + \frac{c'}{c\tau} z\right) = 0,$$

che rappresenta un cilindro parabolico passante per K. Detta curva può altresì rappresentarsi parametricamente colle equazioni:

$$x = \frac{-3\left(\tau + \frac{c'}{c}\lambda\right)\left[\tau^2 + \left(\tau^2 - \frac{9}{16}c^2\right)\lambda^2\right]\lambda}{\left[\tau^2 + \left(\tau^2 + \frac{9}{16}c^2\right)\lambda^2\right]^2}$$

$$y = \frac{9c\tau\left(\tau + \frac{c'}{c}\lambda\right)\lambda^2}{2\left[\tau^2 + \left(\tau^2 + \frac{9}{16}c^2\right)\lambda^2\right]^2}$$

$$z = \frac{9c\tau\left(\tau + \frac{c'}{c}\lambda\right)\lambda^3}{2\left[\tau^2 + \left(\tau^2 + \frac{9}{16}c^2\right)\lambda^2\right]^2};$$

le coordinate (x, y, z) dei punti del ramo che oscula in P la curva C, si hanno da qui dando al parametro λ valori dell'intorno di $\lambda = 0$; risulta facilmente eliminando λ:

$$y = \frac{c}{2}x^2 + \frac{c'}{6}x^3 + \dots$$

$$z = -\frac{c\tau}{6}x^3 + \dots,$$

e questi sviluppi coincidono effettivamente fino ai termini del 3° ordine con quelli relativi alla C ([5]).

3. Una configurazione geometrica. — Aggiungiamo da ultimo che *l'intorno del 3° ordine di* P *su* C *può venir definito univocamente mediante le rette* t *ed* r *uscenti da* P, *ed il punto* O *situato nel piano perpendicolare in* P *alla* t.

([5]) Cfr. Mem. cit. in ([1]), formule (6.6), p. 205.

Questa figura dipende da 9 costanti, ed è invariantivamente legata all'elemento del 3° ordine. Quand'essa sia arbitrariamente assegnata, si costruisce subito ed in modo unico l'elemento del 3° ordine ad essa relativo; basta all'uopo considerare la curva intersezione della sfera di centro O e raggio OP, col cono ottenuto facendo ruotare t attorno ad r: l'elemento cercato è quello che appartiene al ramo di questa curva che tocca in P la t [6].

[6] Per l'ordine d'idee di questo n.°, cfr. l'osservazione di W. BLASCHKE posta alla fine della Mem. cit. in [1], e la Nota *Curve tipiche iperosculatrici* di B. DE FINETTI (questo « Bollettino », 1930, p. 20).