Bollettino Unione Matematica Italiana

Juan Carlos Vignaux

Sulle successioni uniformemente convergenti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.3, p. 168–169.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_3_168_0>

Sulle successioni uniformemente convergenti.

Nota di J. C. VIGNAUX (a Buenos Aires).

Il prof. G. VITALI in una Nota (1) ha dimostrato *che se una successione*

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ f_n(x), \ldots$$

di funzioni crescenti della variabile x *in un intervallo* (a, b), *converge verso una funzione continua, la convergenza è uniforme.* Un criterio analogo si può enunciare per le successioni crescenti con l'indice n.

Dimostreremo in effetto che *se una successione di funzioni monotone crescenti*

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq f_n(x) \leq \ldots \tag{1}$$

per ogni valore di x *interiore all'intervallo chiuso* (a, b), *tende verso una funzione limite* f(x) *continua in* (a. b), *la convergenza è uniforme in questo intervallo.*

Dalla continuità della funzione $f(x)$ nell'intervallo (a, b), risulta che il limite superiore di $f(x)$ in (a, b) è un certo numero finito L. Per altro, giacchè per ipotesi si verifica

$$f_{n+1}(x) \geq f_n(x). \tag{2}$$

$$f_n(x) \leq f(x) \tag{3}$$

qualunque sia l'intero n e per ogni valore di x di (a, b), risulta che le funzioni $f_i(x)$ della successione sono limitate superiormente nell'intervallo (a, b).

Siano

$$L_1,\ L_2, \ldots,\ L_n, \ldots \tag{4}$$

i limiti superiori rispettivamente delle funzioni $f_1,\ f_2, \ldots,\ f_n, \ldots$ nell'intervallo (a, b). La successione numerica (4) è *monotona crescente* ed i suoi termini si conservano inferiori al numero L; quindi si ha

$$\lim_{n \to \infty} L_n \leq L$$

(1) G. VITALI, *Sulle successioni uniformemente convergenti.* (« Bollettino della Unione Matematica Italiana », anno IV, n. 3, 1925, pag. 107).

cioè, dato un numero ε positivo ed arbitrariamente piccolo, esiste un intero positivo N, tale che

$$L_{n+p} - L_n < \varepsilon$$

per ogni $n \geq N$ e qualunque sia l'intero $p > 0$.

Onde risulta che

$$|f_{n+p}(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

per ogni $n \geq N$ ed in ogni punto x inferiore all'intervallo (a, b): ciò che prova la convergenza uniforme della (1) nell'intervallo (a, b).