UMI

Recensioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.3, p. 181–198.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_3_181_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1930.

RECENSIONI

W. Blaschke: *Vorlesungen über Differentialgeometrie.* (Berlin, Springer): T. I, *Elementare Differentialgeometrie,* 3ª ediz., 1930 (bearbeitet und herausgegeben von G. Thomsen) pp. X + 311.

A breve distanza dall'uscita del III volume di questo ottimo trattato di Geometria Differenziale, ancora una nuova edizione, in parte rielaborata ed accresciuta di nuovi capitoli, ci giunge del I volume: la terza in meno di dieci anni (1). Ciò può dare già un'idea del largo favore incontrato da quest'opera: brillante rassegna, fatta con modernità di vedute e con scioltezza e perspicuità di stile, di alcune fra le più suggestive teorie geometriche.

Ispirandosi alla visione gruppale del Klein, l'A. ha così distribuito fra i tre primi volumi (quelli finora usciti) la trattazione delle geometrie differenziali degli enti dello spazio ordinario (2): ha dedicato il I allo studio delle proprietà invarianti pel *gruppo dei movimenti*, il II alle proprietà invarianti pel *gruppo delle affinità*, il III ai *gruppi* di Möbius, di Laguerre, di Lie, che sono i più importanti fra i gruppi (finiti) di trasformazioni *circolari* nel piano e *sferiche* nello spazio.

Dovrò qui limitarmi a dire brevemente (3), a proposito del I volume, soltanto delle più interessanti modificazioni e aggiunte introdotte nella più recente edizione; e a dare poi una rapida scorsa al contenuto del III volume, sintesi mirabilmente concepita ed attuata di ricerche svoltesi per la maggior parte nell'ultimo

(1) La prima edizione è del 1921 (Recensione di E. Bompiani nel volume II di questo « Bollettino », 1923, pp. 30-36); la seconda è del 1924. Il II volume (*Affine Differentialgeometrie*) è uscito nel 1923. (Recensione di E. Bompiani in questo « Bollettino », vol. III, 1924, pp. 89-91).

(2) Nell'ultimo volume l'A. ci esporrà (ved. Prefazione al I vol., 2ª ediz.) la *Geometria degli spazi riemanniani* a più dimensioni, e particolarmente, le basi geometriche della *Teoria della Relatività.* Nel II volume v'è già un breve cenno di geometria iperspaziale (pp. 167-172: ipersuperficie in E_n affine).

(3) Riferendomi pel resto alle citate Recensioni del Bompiani.

decennio, ad opera principalmente del BLASCHKE stesso e dei suoi valenti collaboratori [1], e almeno qui in Italia, non molto conosciute finora.

Insieme a parecchi miglioramenti di dettaglio, troviamo nella attuale edizione del I volume due innovazioni particolarmente notevoli. Anzitutto: notiamo l'introduzione — se pure in modo non sistematico, anzi, per così dire, accessorio — di *procedimenti invariantivi* per lo studio differenziale metrico (« in piccolo ») delle curve e delle superficie. Questo riesce particolarmente utile anche come preparazione alla lettura del III volume, ove tali metodi d'indagine vengono più sistematicamente applicati. Precisamente:

Nella *Introduzione* (che in questa edizione l'A. ha premesso ai capitoli sulle curve e superficie: pp. 1-11) viene, per così dire preparato il terreno, risolvendo (dopo una breve esposizione dei primi elementi del *Calcolo Vettoriale* ordinario) il problema della *determinazione di un sistema completo di invarianti indipendenti di un dato sistema di punti, o di vettori*, pel gruppo dei movimenti.

Una prima applicazione di questo risultato viene data nel Cap. 1° (*Teoria delle curve*) ove è aggiunta (pp. 19-25) una interessante ed ampia discussione sulla determinazione degli invarianti di una curva. A questo proposito l'A. introduce anche le « derivate invarianti » lungo una curva, non però nel modo seguito dal SANNIA, ma come derivate rispetto a un parametro σ intrinsecamente definito dalla curva, data nel gruppo dei movimenti: considerando i casi in cui $d\sigma$ è l'*elemento d'arco*, o l'*angolo di contingenza*. Più innanzi l'A. dedica allo studio, con procedimenti invariantivi, delle *superficie* nel gruppo dei movimenti un intero nuovo Capitolo (il 5°: pp. 123-145); ove anzitutto egli introduce, in modo analogo a quello seguito nel Cap. 1° per le curve, le « derivate invarianti » sulla superficie (così l'A. chiama le « derivate intrinseche », secondo RICCI e LEVI-CIVITA, rispetto al doppio sistema ortogonale delle linee di curvatura): poi se ne vale per scrivere in forma invariante le formule fondamentali della teoria delle superficie di un R_3 euclideo, e per studiare certe superficie speciali (le superficie *modanate* e le superficie *canale* [2]).

[1] Tra questi va particolarmente ricordato il THOMSEN, il quale, fra l'altro, ha avuto modo di dare ampio sviluppo, nella stesura del terzo volume, a quella « gemeinsame Behandlungsweise verschiedener Differentialgeometrien » da lui già schematicamente esposta in un interessante lavoro del 1924 (« Mathem. Zeitschrift », 21 Band, pp. 254-285).

[2] Così l'A. chiama le superficie inviluppo di ∞^1 sfere, anche di raggio

Particolarmente utile ed interessante riesce, in questa teoria invariantiva, l'introduzione di *due forme differenziali lineari* invarianti, ds_1 e ds_2 (elementi d'arco delle linee di curvatura), per le quali possono esprimersi le tre classiche *forme fondamentali* della superficie. A tali forme si collega il problema, trattato in due nuovi interessanti paragrafi del Cap. 6° (pp. 181-190), della *rappresentazione isometrica con conservazione delle linee di curvatura.*

Anche nella trattazione differenziale della *Geometria della retta* (Cap. 9°) l'A. ha aggiunto (pp. 289-292) la rappresentazione in forma invariante delle formule fondamentali della teoria delle congruenze.

Un'altra innovazione notevole è costituita dalla teoria delle *strisce superficiali* (« Flächenstreifen »), a cui l'A. dedica pure, trattandola a parte come premessa allo studio delle superficie, un nuovo Capitolo (il 3°: pp. 67-84). Ricorderò che le *strisce* (questa è la denominazione italiana usata dal BIANCHI) sono le totalità ∞^1 di elementi piani uscenti dai punti di una curva e contenenti le direzioni delle tangenti ad essa. L'esposizione delle proprietà differenziali delle strisce, di cui sta a base un gruppo di formule analoghe a quelle di FRENET, è interessante e sostanzialmente nuova: naturalmente vi si inquadrano molti risultati noti, relativi particolarmente alle strisce *asintotiche*, *geodetiche* e di *curvatura*, che vi trovano anzi la sede più appropriata. L'A. ha anche l'occasione d'introdurre la nozione di *parallelismo* (superficiale) di LEVI-CIVITA, che però non utilizza nel seguito.

La preventiva esposizione della teoria differenziale delle strisce dà luogo a svariate, utili semplificazioni negli ulteriori sviluppi di geometria delle superficie (1). Debbo, per brevità, passare sotto silenzio queste e parecchie altre modificazioni e aggiunte che sarebbero degne di nota (2): ma mi piace chiudere questo rapido cenno sulla nuova edizione del I volume segnalando la simpatica, commossa rievocazione, che l'A. fa (in nota a p. 207) dell'indimenticabile Maestro della Scuola Pisana, del prof. LUIGI BIANCHI, troppo presto rapito alla Scienza italiana e all'affetto reverente dei suoi scolari: alla cui schiera lo stesso A. (e ciò sia concesso anche allo scrivente) si compiace rammentare d'aver appartenuto.

ENEA BORTOLOTTI

variabile. Secondo il BIANCHI, come è noto, la stessa denominazione è riservata al caso in cui le ∞^1 sfere hanno lo *stesso raggio*.

(1) Vedi: pp. 81, 94, 99, 106, 113, 147, 151.

(2) Vedi particolarmente: pp. 28-30, 61-64, 170-172, 228-230.

W. Blaschke: *Vorlesungen über Differentialgeometrie.* (Berlin, Springer): T. III, *Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln,* 1929 (bearbeitet von G. Thomsen), pp. X–474.

Cercherò ora di dare un'idea, inevitabilmente schematica e sommaria, del ricco e multiforme contenuto di questo volume.

I gruppi che vi sono presi in considerazione, come ho già accennato (ved. la Recensione precedente) sono quelli di Möbius, di Laguerre, di Lie. L'A. (dopo una breve *Introduzione*) inizia (nel Cap. 1°) la sua esposizione dallo studio del *gruppo* di Möbius nel piano.

La *geometria* di Möbius è quella che in molti lavori recenti dell'A. stesso e di altri è chiamata *geometria conforme.* È interessante accennare alla via qui seguita per introdurla. Ai punti (propri ed impropri) dello spazio *esterni* a una data sfera possono farsi corrispondere biunivocamente i cerchi sezione della sfera coi rispettivi piani polari: a questi cerchi, mediante proiezione stereografica, i cerchi e le rette (*M*-cerchi) di un piano π. Al gruppo delle omografie dello spazio che mutano in sè la supposta sfera viene allora a corrispondere (isomorficamente) la totalità delle *trasformazioni puntuali del piano* π *che mutano biunivocamente* M-*cerchi in* M-*cerchi*: è questo appunto il gruppo di Möbius nel piano, che risulta dunque isomorfo al gruppo dei movimenti della *metrica iperbolica* che ha la supposta sfera come assoluto. Le coordinate proiettive dei punti dello spazio e in particolare della supposta sfera si interpretano, nel modo più naturale, sul piano π, come *coordinate tetracicliche* dei cerchi, e in particolare dei punti.

L'A. espone parallelamente (Cap. 1°), dopo avere premesso alcune nozioni fondamentali di geometria iperbolica *piana,* gli elementi della *geometria iperbolica nello spazio* e della *geometria di Möbius nel piano,* indi passa (Cap. 2°) allo studio della *teoria invariantiva* del gruppo di Möbius.

L'A. si occupa in particolare degli invarianti di un sistema di tre cerchi: introduce poi la nozione fondamentale di *cerchi orientati,* e definisce per essi le *coordinate* (tetracicliche) *normali.* Indi mostra come le tre geometrie metriche: *euclidea, non euclidee iperbolica ed ellittica* nel piano possano subordinarsi alla geometria di Möbius, perchè i loro gruppi sono isomorfi a quelli delle trasformazioni di Möbius nel piano che lasciano fisso un punto, o un cerchio reale, o un cerchio immaginario.

Nel Cap. 3° hanno inizio le ricerche *differenziali* vere e proprie, con lo studio dei *sistemi* ∞^1 *di cerchi* e poi, in particolare, delle *curve* nel piano, rispetto al gruppo di Möbius. Indi l'A. passa a studiare i *sistemi* ∞^2 *di cerchi* nel piano di MÖBIUS: questo studio equivale a quello delle *superficie nello spazio iperbolico* e anche a quello dei *doppi sistemi* ∞^1 *ortogonali sulla sfera*.

L'A. viene poi (Cap. 4°) alla *geometria di Laguerre nel piano*, che introduce mediante la cosidetta *proiezione isotropa*. Rammenterò di che si tratta: ciascun *punto* (proprio) dello spazio viene rappresentato su di un piano π mediante il *cerchio orientato* (oppure *punto*), intersezione di π col cono rotondo che ha quel punto come vertice, l'asse normale a π e l'angolo d'apertura 45°. Diciamo *rette isotrope* le generatrici di tali coni, cioè le rette inclinate di 45° su π: diciamo *L*-cerchi di π i *cerchi orientati* e i *punti* (propri) del piano: al gruppo delle *affinità dello spazio che mutano rette isotrope in rette isotrope* viene a corrispondere (isomorficamente), per la proiezione isotropa, il gruppo delle *trasformazioni del piano* π *che mutano biunivocamente rette orientate in rette orientate, ed* L*-cerchi in* L*-cerchi*: questo è il gruppo di LAGUERRE. Esso è anche isomorfo (nello spazio) al *gruppo di* LORENTZ della Relatività speciale, il che ne aumenta singolarmente l'interesse. Dopo una interessante esposizione degli elementi della geometria di LAGUERRE nel piano, l'A. passa a un breve studio differenziale delle curve piane, considerate come sistemi ∞^1 di cerchi: dei loro cerchi osculatori; e particolarmente, dei *cicli* di LAGUERRE, le curve per le quali si annulla l'invariante Φ (p. 164) che in questa geometria è l'analogo della curvatura.

Si passa infine al pruppo di LIE nel piano. Introdotte, a partire dalle coordinate *tetracicliche* normalizzate, le coordinate (omogenee) *pentacicliche*, legate dalla relazione

$$(1) \qquad -y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 = 0,$$

si viene a determinare una corrispondenza biunivoca tra i punti di una quadrica (1) di S_4 e i *K-cerchi* (cerchi orientati, rette orientate, punti propri, punto improprio) del piano: le omografie dell'S_4 che mutano la quadrica (1) in sè formano un gruppo isomorfo a quello delle *trasformazioni del piano che mutano biunivocamente* K*-cerchi in* K*-cerchi, e* K*-cerchi tangenti in* K*-cerchi tangenti*: il *gruppo di* LIE. La *teoria degli invarianti* di questi gruppi ha qualche analogia con quella del gruppo di MÖBIUS, sostituiti però ai punti i cerchi, e ai cerchi le *congruenze lineari* di cerchi.

L'A. mostra come si possano subordinare le geometrie di MÖBIUS e di LAGUERRE a quella di LIE: il che dipende dal fatto che i gruppi delle prime due geometrie sono sottogruppi di quello di LIE; e come la geometria di LAGUERRE possa riguardarsi quale caso limite di quella di MÖBIUS. Segnalerò ancora una interessante dimostrazione (pp. 214-218) del *teorema fondamentale della geometria proiettiva*, dal quale l'A. ricava agevolmente i *teoremi fondamentali* delle geometrie di LIE, di MÖBIUS e di LAGUERRE.

Nel 6° Capitolo si passa alla *geometria dello spazio*. Seguendo il cammino inverso di quello percorso pel caso del piano, l'A. prende le mosse dalla geometria di LIE, dalla quale ricava poi quelle di MÖBIUS e di LAGUERRE, ad essa subordinate. Introdotte dunque le coordinate *esasferiche*, l'A. studia anzitutto la geometria (elementare) di LIE delle sfere (orientate) e dei complessi di sfere dello spazio, ponendola in relazione (nel modo ben noto) con la geometria proiettiva delle rette e dei complessi di rette, di cui svolge pure, parallelamente, lo studio. In particolare, vengono insieme introdotte e considerate le nozioni di *quadrica rigata* e di *ciclide di Dupin*. L'A. svolge poi lo studio delle *strisce* superficiali (cfr. vol. I, Cap. 3°) nelle geometrie delle sfere e delle rette. (Un *elemento piano* in queste geometrie si definirà mediante *due sfere tangenti*, o *due rette incidenti*).

Infine, l'A. espone gli elementi fondamentali delle geometrie di MÖBIUS e di LAGUERRE nello spazio.

Nel 7° Capitolo svolge poi insieme, e parallelamente, gli elementi della teoria differenziale delle superficie nelle geometrie di MÖBIUS e di LAGUERRE. Anche qui (cfr. Cap. 5° del I vol.) si presentano *due forme diffenziali lineari* invarianti; e due *quadratiche* che possono esprimersi per quelle. Dallo studio delle *superficie* l'A. passa (Cap. 8°) a quello dei *sistemi a due parametri di sfere* (nelle geometrie di MÖBIUS e di LAGUERRE), che ne è una generalizzazione, e a svariate altre ricerche che vi si connettono. Tra queste troviamo insieme a ricerche recenti (come quelle relative alle superficie *M*-minime e *L*-minime) anche risultati classici (ad es. di RIBAUCOUR e di DARBOUX), che appaiono qui nella loro sede più naturale.

Infine il 9° Capitolo contiene, insieme agli elementi della *teoria delle superficie* nella geometria di LIE, anche i primi elementi della *geometria proiettiva differenziale delle superficie* (secondo FUBINI), che nella geometria proiettiva dello spazio rigato è proprio la teoria corrispondente alla geometria delle superficie nello spazio di sfere di LIE. L'A. considera anche la generalizzazione di quest'ultima geometria, costituita dalla teoria dei *sistemi* ∞^2 *di ciclidi*: quando questo sistema si riduce a quello formato dalle ∞^2 *ciclidi* di LIE [1] di una superficie, si ricade nella teoria delle superficie.

[1] La *ciclide di* LIE (ved. p. 390) è l'analogo della *quadrica di* LIE della geometria proiettiva differenziale.

L'analoga teoria nella geometria proiettiva dello spazio rigato, che qui non viene esposta, è stata data dal THOMSEN in un lavoro del 1925 ([1]). Tra le altre ricerche che in quest'ultimo Capitolo sono svolte, menzionerò lo studio delle superficie *K-minime* e *proiettivo-minime* (pp. 440-447).

Un' *Aggiunta* contiene delle sintetiche biografie di MÖBIUS, LAGUERRE, LIE. Come i precedenti volumi, anche questo è fornito di una abbondante dotazione di problemi proposti, che in gran parte costituiscono dei veri e propri complementi al testo: portando ulteriori (spesso assai recenti) risultati con opportuni riferimenti bibliografici.

In complesso l'opera si raccomanda vivamente all'attenzione e allo studio di chiunque voglia tenersi al corrente dei progressi e delle conquiste del pensièro geometrico.

ENEA BORTOLOTTI

F. SEVERI: *Conferenze di Geometria algebrica,* raccolte da B. SEGRE (Roma, Stab. Tipo-Lit. del Genio Civile, 1927-29, pagg. IV+392).

Queste conferenze, impartite all'Università di Roma negli anni scolastici 1927-28 e 1928-29, ma destinate, e per buona ventura, ad un uditorio più vasto, si offrono al lettore in una nitida edizione litografica, curata inizialmente da B. SEGRE, ma, nella parte maggiore ed essenziale, che, è bene dirlo subito, tratta della *Topologia,* elaborata personalmente dall'Autore.

L'opera sarà indubbiamente accolta dal pubblico studioso coll'interesse e col favore che non può mancare ad una trattazione intesa a colmare un'importante lacuna della nostra letteratura scientifica; tanto più se, come nel caso, questa trattazione è in molte parti improntata ad alta originalità, e rivela il corso d'un travaglio meditativo, che induce ad accompagnare colle proprie le riflessioni del Maestro, ed a subirne le suggestioni espositive.

La Geometria algebrica rappresenta per la topologia un punto di partenza ed un punto di arrivo; non l'unico, ma certo uno dei più brillanti. Così è nelle « Conferenze »; se non che, avuto riguardo alle proporzioni, vien fatto di attribuire al titolo una finalità programmatica che non intende arrestarsi alle illustrazioni esposte, ma vi è stata trattenuta soltanto dalle attenzioni che l'argomento centrale ha suscitato nell'Autore. I cultori di Geometria

([1]) *Ueber eine liniengeometrische Behandlungsweise der projektiven Flächentheorie und die projektive Geometrie der Systeme von Flächen zweiter Ordnung.* (« Abhandl. Mathem. Semin. Hamburg », Band IV, pp. 232-266).

algebrica, che hanno conosciuto le fasi del magnifico « Trattato », e si augurano di vederne quanto prima la continuazione, sono incoraggiati ad aspettarsi una rielaborazione più vasta di queste Conferenze, nella quale il programma « in pectore » sia completamente attuato.

Il Maestro non ha bisogno d'incitamenti: gli amici ed i discepoli ben sanno con quanta energia Egli fomenti la vitalità della nostra tradizione geometrica, e con qual compiacimento ne vanti e favorisca la piena aderenza al temperamento artistico nazionale. Ad una propaganda così sentita e fattivamente attuata, rispondano i giovani studiosi volgendo ad un indirizzo poderoso e ricco di applicazioni nei campi più svariati della matematica, tante attività meno seriamente utilizzate. Valga di norma agli accorti, il monito del Nostro: Calcolo funzionale e topologia son gli strumenti di sintesi, a cui s'affida la matematica dell'avvenire [1].

***

La materia delle 34 conferenze si coordina in un tutto organico, che però consente, nel modo più spontaneo, un raggruppamento subordinato, assai opportuno ai fini di un referto analitico. Anche ad un primo sguardo si lasciano nettamente identificare nella raccolta quattro distinte parti, di cui le due estreme trattano essenzialmente di geometria algebrica, le due centrali di topologia. Una breve appendice raccoglie alcune osservazioni ed aggiunte complementari.

La *prima parte* è essenzialmente introduttiva alle applicazioni esposte nell'ultima, ma interferisce utilmente anche colla topologia, alla quale fornisce materia per interessanti esemplificazioni e discussioni critiche. Vi si introducono in modo rapido ed elegante, integrato da sobrî richiami al Trattato di geometria algebrica dell'A., le nozioni fondamentali sugli enti algebrici, sulle serie e sistemi lineari ad essi appartenenti, con particolare riguardo alla riduzione delle singolarità. In relazione all'ultimo argomento è da segnalarsi quanto si riferisce alla nozione di *falda invariantiva* d'una superficie algebrica, ed agl'interessanti confronti colla nozione di *falda analitica*, che, attraverso a tipici ed elementarî esempî, conducono ad illustrare il divario fra i due concetti.

A ciò fa seguito la nozione, dovuta al SEVERI, di *ordine invariantivo* (assoluto e relativo) delle superficie (o varietà) algebri-

[1] Discorso alla riunione di Torino (1928) della Società Italiana per il progresso delle Scienze.

che d' una classe. In argomento l'A., accenna ai proprî risultati concernenti le varietà grassmanniane, intrattenendosi più diffusamente sulle *varietà di* SEGRE, in particolare sulle V_{2r} *di tipo ellittico,* i cui punti reali rappresentano biunivocamente senza eccezioni la totalità dei punti reali e complessi d'uno spazio S_r.

L'importanza di questa rappresentazione risiede in ciò che essa porge il modello più naturale, e per dir così privilegiato, per la rappresentazione corretta del campo di variabilità di r variabili complesse, in particolare del campo all'infinito: privilegiato, in primo luogo perchè *modello minimo* (algebrico e *privo di punti multipli*) per la rappresentazione in discorso, sia di fronte alle trasformazioni birazionali, quanto (almeno è da prevedersi [1]) di fronte agli *omeomorfismi,* in secondo luogo perchè, analogamente al caso di $r=1$ (sfera complessa) conserva il carattere omografico alle sostituzioni lineari sulle variabili (osservazione di B. SEGRE). In modo particolare viene approfondito il caso della V_4^6 di $S_8 (r=2)$, che, tra l'altro, conduce ad illustrare l'anomalia all'infinito legata all'ordinaria rappresentazione dei valori di due variabili complesse coi punti d'un S_4.

L'argomento è ripreso nella terza parte (conf. XVII) con osservazioni acute e definitive, informate al principio — di cui non occorre commentare la legittimità, per non dir necessità — che le proprietà delle funzioni analitiche di due variabili, nell'intorno di un punto qualsiasi del loro campo d'esistenza (al finito od all'infinito) debban definirsi in modo invariante di fronte alle trasformazioni lineari (omografiche) delle variabili. L'A. osserva che il modo usuale di trattare i valori infiniti delle variabili non rispetta questo principio, in quanto si affida ad una trasformazione non lineare, ma quadratica $\left(x'=\frac{1}{x},\ y'=\frac{1}{y}\right)$ che pone i punti all'infinito (dove ha proprio delle eccezioni) in condizione del tutto diversa da quelli al finito, e ne snatura il campo, porgendone un modello costituito da una varietà *riducibile.* Dopo ciò, e viste le brillanti conseguenze che il SEVERI ha recentemente tratto (Lincei, giugno 1929) dalla sua rappresentazione e dalla corretta interpretazione delle singolarità all'infinito, è da ritenersi che il modello in discorso sia ormai definitivamente acquisito all'Analisi.

L'ultima conferenza (IX) della prima parte è dedicata alle *varietà riemanniane,* le quali vengon realizzate mediante *modelli algebrici* privi di punti multipli, seguendo una via indicata dall'A.

[1] L'A. lo dimostra più avanti (conf. XVII) per $r=1$, e formula l'espressa previsione.

stesso in un corso del 1910-11, che lo scrivente ha avuto occasione d'illustrare in vari sensi.

La *seconda parte* delle Conferenze è dedicata alle nozioni fondamentali di topologia, ed alle delicate questioni critiche inerenti alla loro formulazione, portata, e significato. È questa la parte elaborata più originalmente, e perciò più ricca di contributi personali, che, in ogni particolare, domanda d'esser severamente meditata.

Nozioni fondamentali sono quelle di cellula, di varietà topologica, in particolare omogenea, di contorno e d'intorno (d'un punto) sopra una varietà, di reticolato, d'omotopia ed isotopia; prima fra tutte, ed essenziale al significato delle altre, la nozione di *omeomorfismo*, in relazione alla quale resta definito il *campo d'invarianza delle proprietà topologiche*.

A fondamento della nozione d'omeomorfismo sta quella di *continuità* d'una corrispondenza. Ad essa l'A. dedica alcune interessanti riflessioni, intesa a stabilire, sotto ipotesi molto larghe, l'equivalenza fra tre diverse impostazioni del concetto: un ricorso al *postulato di* ZERMELO, è acutamente eliminato nell'Appendice.

Un rendiconto preciso di tutte le questioni discusse in questa parte, e delle molteplici connessioni fra esse istituite, non potrebbe aspirare al requisito della brevità: onde ci limiteremo a richiamare l'attenzione e l'interesse del lettore su due punti, intorno ai quali il contributo personale si afferma più poderoso e significativo.

Primo punto: Carattere topologico delle nozioni di punti interni e terminali (punti contorno) ed equivalenza colle analoghe nozioni, intese in senso metrico-proiettivo, con riferimento all'ambiente della varietà.

Tipico è in proposito il caso *delle varietà ad una dimensione* aperte (archi di linea omeomorfi ad un segmento rettilineo). Affinchè alle relative nozioni di *punti interni* e di *punti terminali*, resti acquisito il carattere topologico, occorre svincolarle dal *particolare* omeomorfismo mediante il quale son definite, e pertanto provare che un omeomorfismo fra due segmenti rettilinei muta gli estremi ed i punti interni dell'uno negli elementi analoghi dell'altro. Di questa proprietà l'A. espone una dimostrazione originale ed elegante ulteriormente semplificata in un recente lavoro (Rendiconti, Palermo, 1930).

I punti terminali ed i punti interni si possono anche definire in base al comportamento delle semirette tangenti e degl'intorni di ciascun punto, staccati sulla linea da cellule (ipersferiche, abbastanza piccole) contenenti il punto stesso nell'interno. L'A. dimostra che gli enti così definiti si identificano coi precedenti (e di conseguenza i *versi intuitivi* coi *versi topologici*) sotto larghe ipotesi notevolmente semplificate nel precitato lavoro in cui la proprietà è stabilita per tutte le linee con soli *punti semplici*.

Per le varietà a più dimensioni si presentano questioni analoghe; e la risoluzione della prima, nelle ipotesi più larghe, può affidarsi al *teorema di* JORDAN generalizzato (teorema di SCHÖNFLIES–LEBESGUE–BROUWER) per quanto, come il SEVERI dimostra, in condizioni lievemente restrittive, sia lecito dispensarsene. La seconda questione è anch'essa risoluta affermativamente pure a patto di lievi restrizioni (a cui viene assoggettata la nozione generale di varietà topologica) le quali sono ad esuberanza soddisfatte dalle *varietà analitiche*.

È pure notevole, in tema di linee, l'importante proprietà stabilita dall'A. a riguardo delle *curve* (piane) *intuitive*, cioè di quelle che possiedono i caratteri (opportunamente precisati) rispondenti alla nozione intuitiva di curva. La proprietà è, assieme alla duale, quella d'esser incontrate da *ogni retta* del piano in un numero finito e limitato di punti, il cui massimo è pertanto un carattere proiettivo (*ordine*, risp. *classe*) reale della curva. I valori dei due caratteri sono stati in seguito espressivamente precisati dall'A. nel ricordato lavoro.

Secondo punto: varietà omogenee.

La nozione di *varietà omogenea* M_n (ad n dimensioni) ha in topologia un'importanza alla quale finora era stato dato poco rilievo, per quanto essa nozione coi relativi attributi (talvolta tacitamente ammessi su basi intuitive) intervenisse implicitamente laddove era necessaria. Il SEVERI vi s'intrattiene con precise ed approfondite illustrazioni appoggiate ad una brillante esemplificazione.

Una varietà M_n è omogenea nell'intorno di un punto P se quell'intorno (purchè abbastanza piccolo) riducesi ad un'*unica* cellula n–dimensionale contenente *P nell'interno*. Il che ad esempio non accade quando M_n sia una superficie conica M_2 (con due falde) e si ponga P nel vertice.

La connessione d'una M_n *non omogenea* può esser rotta da una M_k con $k < n - 1$, com'è della superficie conica precedente quando s'interdica il passaggio per il vertice. Più elegante ed istruttivo è l'esempio offerto dalla considerazione della M_4 riempita dalle corde d'una superficie F reale di VERONESE, la quale resta suddivisa dalla F in due regioni distinte (cioè comunicanti solo attraverso F); d'onde un *apparente paradosso* già segnalato ed approfondito dall'A. e da B. SEGRE in una nota (Lincei, gennaio 1929) contemporanea alle conferenze sull'argomento. La spiegazione risiede in ciò che nei punti di M, i quali son doppi (conici) per M_4, quella varietà non è omogenea.

Il SEVERI trae da ciò materia per un doppio commento, topologico ed algebrico. A conclusione del primo sta un teorema il quale afferma che la circostanza paradossale di cui sopra implica necessariamente la non omogeneità di M_n, in quanto una M_n omogenea (analitica) non può essere divisa in due parti da una M_k per cui sia $k < n - 1$.

Il commento algebrico è dedicato alla spiegazione d'un *secondo paradosso apparente* legato alla considerazione della M_4 predetta, il quale risiede in ciò che quella M_4 non si può trasformare birazionalmente *senza eccezioni* in una varietà priva di punti multipli. Siccome la M_4 stessa è in corrispondenza biunivoca *senza eccezioni* colle coppie (non ordinate) di punti d'un piano, ne deriva l'impossibilità di realizzare l'immagine algebrica (totalmente biunivoca) dell'insieme di quelle coppie (e più in generale delle coppie di punti d'una superficie algebrica) mediante una varietà *priva di punti multipli*. Impossibilità che prima d'esser accertata e motivata, lasciava adito a ragionevoli inquietudini.

La motivazione del SEVERI elimina ogni dubbio in proposito, precisando che l'intorno del primo ordine di un punto dell'ente « varietà delle coppie » possiede un *ordine invariativo* (relativo) che per le coppie formate da punti coincidenti ha il valore 2; d'onde l'impossibilità di rappresentare quell'intorno coll'intorno di un punto semplice d'un qualunque modello algebrico.

Colla *terza parte* delle Conferenze si entra nel vivo della topologia, e se ne percorrono attraverso agli elegantissimi *algoritmi combinatorî*, le tappe essenziali. Il collegamento colla topologia del continuo è fornito da un teorema, che il SEVERI chiama *principale*, e che sta veramente, anche in ordine di complessità, all'apice della trattazione.

Entrano ora in gioco i concetti di carattere più specifico, e gl'invarianti fondamentali, ossia da un lato le nozioni di complesso (singolare o no) di contorno (nell'accezione più specifica) di unilateralità e bilateralità, di congruenza e d'omologia, dall'altro i ranghi di connessione, i numeri di BETTI (ordini di connessione) ed i coefficenti di torsione coi gruppi relativi.

In questa parte l'A., come esplicitamente dichiara, s'è mantenuto in intimo contatto colla trattazione del VEBLEN; ma la lettura, pur confermando la dichiarazione, rivela l'originalità del rifacimento. Tale originalità si manifesta in maniera più rilevante nella conferenza (XVII) dedicata ai complessi e varietà singolari, nel trasferimento al continuo del concetto combinatorio di orientabilità, attraverso alla nozione *d'indicatrice*, e nella dimostrazione dell'invarianza topologica dei coefficienti di torsione. Per quest'ultima il SEVERI ha impiegato un procedimento, che « mutatis mutandis » riproduce quello da Lui istituito per il caso analogo del gruppo della divisione sopra una superficie algebrica.

All'originalità, è ben dichiararlo, s'accompagna anche l'alta opportunità di questa trattaziene, la quale non può esser disconosciuta da chi avverta che, dopo quello del VEBLEN, il nostro è l'unico trattato di topologia delle varietà a più dimensioni (col KÉRÉKJARTO siamo ancora alle superficie). Anche per la topologia l'ora della maturità è venuta, e ne può restar paga l'ombra del grande POINCARÉ, alla quale deve inchinarsi chiunque s'accosti alle alte speculazioni per cui Egli ha tracciato le vie maestre.

L'argomento di questa parte si conchiude con una rapida esposizione della teoria degl'indici di KRONECKER (esclusa dal trattato di VEBLEN) sostanzialmente riassuntiva nella parte culminante, che conclude colla costruzione delle *basi canoniche*, ma opportunamente corredata delle indicazioni bibliografiche essenziali.

Si ritorna infine colla *quarta parte* alla Geometria algebrica, e precisamente alla geometria sopra le superficie algebriche, che ha colla topologia brillanti interferenze, della cui scoperta siam debitori alla geniale opera del LEFSCHETZ. Il SEVERI si limita ad esporre le fasi attraverso cui si effettua l'inquadramento nella topologia della teoria della base per le curve di una superficie algebrica, da Lui creata; ma dopo questo saggio i geometri italiani non si stancheranno di chiedere — indulga il Maestro a quest'insistenza — quant'altro conferisca ad illuminarli sulle Sue vedute intorno all'opera del geometra di Princeton.

Noi leggiamo nelle prime pagine di quest'ultima parte, la garbata critica alla dimostrazione d'uno dei teoremi fondamentali del LEFSCHETZ, relativo all'eguaglianza tra i numeri algebrico ed aritmetico delle intersezioni di due *cicli algebrici* entro alla riemanniana d'una superficie, sorretta da una nuova dimostrazione esauriente. Più avanti incontriamo l'elegante esposizione algebrico-topologica della teoria della base arricchita dei nuovi significati acquisiti dal LEFSCHETZ alle concezioni del SEVERI ([1]). E domandiamo che il Maestro prosegua!

Vuol ancora esser segnalato al lettore il sunto preparatorio all'esposizione predetta, inteso a richiamare le nozioni fondamen-

([1]) Alla cui presentazione giova una osservazione semplificativa dell'ALBANESE.

tali di geometria sopra una superficie algebrica, nel quale lo sviluppo storico delle concezioni, e la conquista dei punti strategici son rappresentati in fasi intensamente vissute. Ed infine non vanno dimenticate, tra i commenti dell'Appendice, le eleganti dimostrazioni date dall'A. ai teoremi di NETTO-LÜROTH sull'invarianza topologica delle dimensioni, nei casi, per dir così più semplici: dimostrazioni che, colla scorta del *teorema di* JORDAN generalizzato, si estendono alla più generale proposizione di LEBESGUE-BROUWER. D'onde l'espressiva conclusione che il solo punto d'*appoggio* delle questioni fondamentali di topologia (dimensione e contorno) è dato dal predetto teorema di JORDAN.

* * *

La premessa esclude quasi ogni conclusione. Le Conferenze del SEVERI, per l'importanza e l'altezza dei temi trattati, per la chiarezza e vivacità della redazione, per le vaste contribuzioni originali ed i preziosi riferimenti, costituiscono un apporto di primissimo ordine alla nostra letteratura matematica. Libro attraente, ma non facile: libro che fa pensare. Auguriamoci di leggere ben presto i risultati delle meditazioni che avrà suscitato.

A. COMESSATTI

C. GINI e L. GALVANI: *Di una applicazione del metodo rappresentativo all'ultimo censimento italiano della popolazione.* (1° dicembre 1924). Annali di Statistica, serie IV, vol. IV, 1929-VII.

Viene nella statistica metodologica definito come metodo rappresentativo quello consistente nell'eseguire una rivelazione o elaborazione parziale dei casi in cui un certo fenomeno si presenta, in modo che sia possibile di generalizzare i risultati da essa ottenuti alla totalità dei casi. Tale definizione potrebbe indurre a pensare che un campione possa genericamente presentare tutte le caratteristiche della totalità da cui esso è estratto, per quanto concerne i diversi fenomeni e i loro aspetti che sono ordinariamente oggetto di indagine statistica, tanto che alcuni Autori giungono ad affermare che il campione stesso dovrebbe fornire una specie di riduzione di tutte le parti dell'insieme. Una tale concezione è erronea. Di solito un campione viene scelto in modo che conservi praticamente l'intensità media di certi caratteri: ora, a meno che non si facciano particolari ipotesi, ciò non basta ad assicurare che esso sia anche rappresentativo dell'intensità media di altri caratteri non tenuti presenti nella scelta, nè che esso sia rappresentativo della variabilità, della forma di distribuzione e delle mutue relazioni degli stessi caratteri tenuti presenti nella scelta, e tanto meno di quelli non tenuti presenti.

A queste conclusioni gli AA. pervengono attraverso considerazioni di carattere teorico; e dopo aver dato un succinto abbozzo di quella che dovrebbe essere una teoria generale della rappresentatività, essi passano a trattare alcune particolari questioni: subordinazione della rappresentatività di taluni aspetti di un carattere alla rappresentatività di altri aspetti dello stesso carattere; rappresentatività subordinate da relazioni lineari fra quantità fondamentali; rappresentatività subordinate da relazioni lineari fra caratteri; conservazione della media aritmetica; scarti fra le medie dei caratteri nella totalità e nel campione; condizioni per la conservazione dello scostamento quadratico medio; condizioni per la conservazione della differenza media e per la conservazione del rapporto di concentrazione.

Tutte le risultanze teoriche vengono sperimentalmente confermate da una particolare indagine che è stata eseguita presso l'Istituto Centrale di Statistica. Dall'insieme dei fogli di famiglia usati per il censimento della popolazione italiana al 1° dicembre 1921 venne estratto un « campione » costituito dai fogli di famiglia relativi a 29 fra i 214 circondari che formavano a quella data la parte del territorio nazionale contenuta nei confini anteriori alla grande guerra. I 29 circondari vennero scelti in modo che i valori medî di sette caratteri concordassero praticamente coi corrispondenti valori medî nella totalità. Tali caratteri (strumentali della scelta) furono: la natalità, la mortalità e la nuzialità, come numero medio dei nati e rispettivamente dei morti e dei matrimoni nel biennio 1921-22 per 1000 abitanti (censimento 1° dicembre 1921); la percentuale della popolazione agricola mensile nell'insieme dei maschi di età superiore ai 10 anni; la percentuale di popolazione agglomerata; il reddito medio accertato ai contribuenti dell'imposta di ricchezza mobile dolle categorie B e C; l'altitudine media, considerando come altitudine media sul livello del mare di ciascun circondario quella del suo capoluogo. Le medie corrispondenti del campione e della totalità presentarono uno scarto relativo inferiore all'1,5 % per la natalità, la mortalità, la nuzialità e l'altitudine media; compreso fra l'1,5 % ed il 5 % per il reddito medio e compreso fra il 5 % e l'8 % per le percentuali della popolazione agricola e della popolazione agglomerata. In conformità al criterio generalmente usato per sperimentare la rappresentatività, il campione era dunque da ritenersi bene rappresentativo della totalità. Senonchè, esaminati altri caratteri (caratteri di verificazione) e precisamente la densità della popolazione (abitanti per Km²) e l'accrescimento naturale, si trovò che, rispetto ad essi, il campione era scarsamente o non era affatto rappresentativo, circa la conservazione del valore medio; e così pure si constatò, calcolando i rapporti di concentrazione, gli indici di dissomiglianza di correlazione e di omofilia, che il campione era scarsamente o non era affatto rappresentativo per la variabilità, per la forma di distribuzione dei diversi caratteri e per le loro mutue relazioni.

L'esperienza eseguita conferma dunque le previsioni teoriche, le quali si riassumono nell'affermazione che il concetto di rappresentatività è relativo e non assoluto. La rappresentatività di un campione dovrà, cioè, caso per caso, definirsi soltanto in riguardo ad uno o a più determinati aspetti di uno o di alcuni determinati caratteri, e non in senso generico, come si fa di consueto.

Il lavoro si chiude con la trattazione di due problemi speciali. Nel primo si determina, sotto particolari ipotesi, la probabilità π che lo scarto percentuale fra il valore medio di un carattere quantitativo nella totalità di K circondari e in un campione di k circondari ($k \leq K$) estratti a sorte non superi un ε assegnato: per $\varepsilon = 1.5$ risulta $\pi = 0.08$ circa, cosicchè la piccolezza di π persuade senz'altro che una giudiziosa scelta del campione può fornire, circa la conservazione del valore medio di un carattere, un risultato assai più soddisfacente di quello che sarebbe da attendersi dal campione estratto a sorte. L'altro problema si riferisce alla determinazione, sotto particolari ipotesi, dei limiti contenenti i valori medî nel campione, relativamente a caratteri diversi da quelli strumentali della scelta.

A. Wintner: *Spektraltheorie der unendlichen Matrizen.* Pag. XII +280. S. Hirzel, ed. Lipsia, 1929.

Questo libro tratta sistematicamente la teoria delle matrici a infinite linee e colonne, teoria che, come è noto, ha ricevuto un nuovo impulso dalle applicazioni alla teoria dei Quanta (Heisenberg). Secondo una denominazione introdotta da Hilbert, si chiama *spettro* di una matrice (i cui elementi contengono linearmente un parametro λ, cioè sono della forma $a_{hk} - \lambda b_{hk}$) l'insieme dei valori di λ, che annullano la matrice stessa; poichè lo studio dell'annullarsi di queste matrici costituisce l'argomento principale della teoria, così è giustificato il titolo del libro. Nel quale l'A., scrittore serio ed ordinato, dopo aver esposto (nei primi due capitoli) i fondamenti algebrici e formali della teoria ed aver richiamato alcuni strumenti analitici, studia le matrici infinite limitate, la teoria dello spettro e le matrici non limitate di Hermite. Nella trattazione l'A. apporta spesso interessanti contributi, alcuni solo di metodo, altri anche sostanziali ed in parte già pubblicati dall'A. in memorie separate. Specialmente interessante a questo proposito la teoria dello *spettro* nelle funzioni quasi periodiche che è qui esposta in appendice.

Il libro si chiude con alcune osservazioni di carattere bibliografico. Mi permetto di rilevare a proposito di esse che l'A. attribuendo ad HILBERT, TOEPLITZ e HELLINGER i principî della teoria, dimentica i lavori pubblicati su questo argomento da S. PINCHERLE. Questa omissione è in parte giustificata dal fatto che anche l'articolo della « Encyclopädie der Math. Wissenschaften » non è preciso in proposito; perciò mi sembra doveroso ricordare che il PINCHERLE ha studiato prima di tutti le operazioni funzionali distributive tra le quali rientrano le operazioni sulle matrici; ha mostrato le caratteristiche principali dello *spettro* e, in particolare, ha osservato (v. la Nota: *Appunti di Calcolo Funzionale distributivo* « Rendiconti del R. Istituto Lombardo » 1897) che una operazione distributiva in uno spazio ad infiniti elementi può condurre ad uno spazio contenuto nel precedente pur non ammettendo radici, e viceversa può ammettere radici pur riproducendo tutto lo spazio. Questa osservazione si trova riprodotta nel libro scritto in collaborazione con AMALDI (*Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi.* Bologna, Zanichelli, 1901; si veda il n. 463, pag. 444) nel qual libro è esposta tutta la teoria. Si può osservare che il PINCHERLE e l'AMALDI si occupano di *operazioni* e non di *matrici*; ma gli AA. affermano esplicitamente che le operazioni saranno in generale rappresentate da matrici a infinite linee e colonne (v. n. 136 a pag. 97) e del resto, per rendere più maneggevole il testo anche il WINTNER rappresenta simbolicamente le matrici allo stesso modo.

L'accenno alla rivendicazione della priorità del PINCHERLE in questi studi, che ora acquistano nuovo interesse per le loro applicazioni fisiche, mi sembra dunque doveroso; ma esso non deve essere inteso come una critica al libro del WINTNER, che, come ho detto, è assai pregevole, ricco di contributi personali notevoli, ed esposto in modo chiaro sì da riuscire assai utile a tutti i cultori di queste teorie.

GIULIO SUPINO

Commentationes in honorem ERNESTI LEONARDI LINDELÖF, *a discipulis editæ*, pag. VI+360, Helsinki (Finlandia), A. G. Sana, 1930.

In occasione del 60° anniversario dell'eminente matematico E. L. LINDELÖF, i suoi discepoli, non pochi dei quali di distinta fama, hanno pubblicato un bel volume contenente, oltre al ritratto del festeggiato e alla dedica, 14 memorie su importanti argomenti quasi tutti di analisi. Ad eccezione di due, scritte in francese, esse sono redatte in tedesco. Ne diamo qui l'elenco, traducendone i titoli:

J. W. LINDEBERG: *Sulla teoria della correlazione.* — R. I. BACKLUND: *Sulla differenza di due numeri, primi cogli* n *primi numeri primi.* — E. KIVIKOSKI: *Sulla teoria dei poligoni proiettivi.* — N. PIPPING: *Sulla approssimazione diofantea.* — K. A. POUKKA: *Sul calcolo delle radici di un'equazione algebrica o trascendente.* — L. AHLFORS: *Sui valori asintotici delle funzioni intere d'ordine finito.* — R. NEVANLINNA: *Sulle funzioni analitiche limitate.* — K. VAISALA: *Sulla teoria dell'algoritmo delle frazioni continue jacobiane di secondo ordine.* — P. I. MYRBERG: *Un teorema sui gruppi fuchsiani e sua applicazione nella teoria delle funzioni.* — E. J. NYSTRÖM: *Sulla applicazione della misura logaritmica, in particolare nell'integrazione grafica.* — K. F. SUNDMAN: *La gravitazione universale e la sua velocità di propagazione.* — F. NEVANLINNA: *Sulla derivata logaritmica di una funzione meromorfa.* — G. JARNEFELT: *Alcune osservazioni sulla relazione fra gli assiomi geometrici di unione ed alcune configurazioni.* — F. IVERSEN: *Sui valori asintotici delle funzioni periodiche.*

(u)