BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

GIUSEPPE USAI

Una proprietà di inversione in un vitalizio continuo

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.4, p. 205–208.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_4_205_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1930.

PICCOLE NOTE

Una proprietà di inversione in un vitalizio continuo.

Nota di GIUSEPPE USAI (a Catania).

Sunto. - *Viene determinata la legge di sopravvivenza più generale quando si facciano certe ipotesi sul vitalizio continuo.*

1. Nei riguardi del vitalizio continuo, unitario:

$$\bar{a}(x, t, \delta) = \int_0^t \frac{l(x+u)}{l(x)} e^{-\delta . u} du \tag{1}$$

relativo alla età x, alla durata t ed al tasso costante δ ho trovato di recente (¹) che se la funzione di sopravvivenza $l(x)$ è del tipo:

$$l(x) = e^{-kx}(\omega - x)^m \qquad (\omega \text{ età estrema}) \tag{2}$$

il prodotto $(\delta + k)\bar{a}(x, t, \delta)$ risulta funzione delle quantità:

$$(\delta + k)(\omega - x - t) \qquad (\delta + k)(\omega - x). \tag{3}$$

Tale risultato generalizzava quello del signor ACHARD (²), il quale, nel caso particolare dei vitalizi perpetui $(t = \omega - x)$ ha riscontrato che il prodotto $(\delta + k)\bar{a}(x, \delta)$ è funzione della sola quantità $(\delta + k)(\omega - x)$.

Orbene, mentre per il suo caso ACHARD ha dimostrato che sussiste la proprietà inversa, questa non ha più luogo quando sia $t \neq \omega - x$.

Dimostrerò infatti che in tale ipotesi ed inoltre quando si suppone il prodotto $(\delta + k)\bar{a}(x, t, \delta)$ funzione delle quantità (3), la legge di sopravvivenza corrispondente è più generale della (2); la dimostrazione relativa si basa, come si vedrà, sul calcolo di un Jacobiano di terzo ordine e su una equazione alle differenze finite nel tasso istantaneo di mortalità.

(¹) GIUSEPPE USAI, *Sulle variazioni di un vitalizio continuo.* « Bollettino Unione Matematica Italiana », 1930.

(²) ACHARD, *Note sur le changement de taux dans le calcul des Annuités viagères.* (Tome III du « Bulletin de l'Institut des Actuaires français ».

2. Per l'ipotesi fatta le tre quantità:

$$(\delta+k)\bar{a}(x, t, \delta), \quad (\delta+k)(\omega-x-t) \qquad (\delta+k)(\omega-x)$$

considerate come funzioni delle x, t, δ non sono indipendenti e perciò dovrà esser nullo il loro determinante funzionale.

Consegue quindi:

$$\begin{vmatrix} (\delta+k)\dfrac{\partial\bar{a}}{\partial x} & -(\delta+k) & -(\delta+k) \\ (\delta+k)\dfrac{\partial\bar{a}}{\partial t} & -(\delta+k) & 0 \\ \bar{a}+(\delta+k)\dfrac{\partial\bar{a}}{\partial t} & \omega-x-t & \omega-x \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando e riducendo, si perviene alla relazione:

$$(4) \qquad (\omega-x)\frac{\partial\bar{a}}{\partial x} - t\frac{\partial\bar{a}}{\partial t} + \bar{a} + (\delta+k)\frac{\partial\bar{a}}{\partial\delta} = 0,$$

e da questa si possono eliminare le derivate parziali.

A tale scopo ricaviamo dalla (1):

$$\frac{\partial\bar{a}}{\partial x} = \int_0^t \frac{l(x)l'(x+u) - l(x+u)l'(x)}{l^2(x)} e^{-\delta.u}\,du$$

e poichè:

$$l'(x+u) = \frac{\partial l(x+u)}{\partial x} = \frac{\partial l(x+u)}{\partial u}$$

possiamo scrivere:

$$\int_0^t l'(x+u)e^{-\delta.u}\,du = l(x+t)e^{-\delta.t} - l(x) + \delta\int_0^t l(x+u)e^{-\delta.u}\,du$$

e di conseguenza:

$$(5) \qquad \frac{\partial\bar{a}}{\partial x} = \frac{l(x+t)}{l(x)}e^{-\delta.t} - 1 + \delta\cdot\bar{a} + \mu(x)\cdot\bar{a}$$

ove:

$$(6) \qquad \mu(x) = -\frac{l'(x)}{l(x)}$$

rappresenta, come è noto, il tasso istantaneo di mortalità all'età x.

Inoltre dalla (1) ricaviamo pure:

$$(7) \qquad \frac{\partial\bar{a}}{\partial t} = \frac{l(x+t)}{l(x)}e^{-\delta.t}.$$

Dopo di ciò basta sostituire le (5) e (7) nella (4) per ottenere:

$$(\delta+k)\frac{\partial\bar{a}}{\partial\delta}=-\frac{l(x+t)}{l(x)}e^{-\delta.t}(\omega-x-t)+(\omega-x)[1-\delta\cdot\bar{a}-\mu(x)\cdot\bar{a}]-\bar{a}.$$

Derivando questa espressione rispetto a t col tener presente la (7) e riducendo si ha:

$$(\delta+k)\frac{\partial^2\bar{a}}{\partial t\,\partial\delta}=-\frac{l'(x+t)}{l(x)}e^{-\delta.t}(\omega-x-t)-\frac{l(x+t)}{l(x)}e^{-\delta.t}\delta\cdot t-$$
$$-\mu(x)(\omega-x)\frac{l(x+t)}{l(x)}e^{-\delta.t}.$$

E poichè dalla (7) si ricava:

$$(\delta+k)\frac{\partial^2\bar{a}}{\partial t\,\partial\delta}=-t(\delta+k)\frac{l(x+t)}{l(x)}e^{-\delta.t}$$

avremo, uguagliando queste ultime due e riducendo,

$$-(\omega-x-t)\frac{l'(x+t)}{l(x)}-(\omega-x)\mu(x)\frac{l(x+t)}{l(x)}=-kt\frac{l(x+t)}{l(x)},$$

e quindi l'equazione alle differenze finite lineare e di primo ordine:

(8) $$(\omega-x-t)\mu(x+t)-(\omega-x)\mu(x)=-kt$$

nella incognita $\mu(x)$ che ora determineremo.

Ponendo perciò:

$$(\omega-x)\mu(x)=\varphi(x)$$

si ottiene:

$$\varphi(x+t)-\varphi(x)=-kt$$

e questa ha per soluzione generale:

$$\varphi(x)=-kx+C$$

ove C è una costante arbitraria o più in generale una funzione periodica $C(x)$ arbitraria in x e di periodo t.

Può anche scriversi:

$$\varphi(x)=k(\omega-x)+C(x)$$

e di conseguenza:

$$\mu(x)=k+\frac{C(x)}{\omega-x}$$

sarà la soluzione [1] generale della (8).

[1] Questo risultato ha la conferma nei procedimenti esposti nel trattato: ERNESTO PASCAL, *Calcolo delle variazioni e delle differenze finite*. Hoepli, Milano.

Stabilito ciò dalla (6) risulta:

$$\frac{l'(x)}{l(x)} = -k - \frac{C(x)}{\omega - x},$$

ed integrando otteniamo:

$$\lg l(x) = -kx - \psi(x) + \lg A,$$

ove:

$$\psi(x) = \int \frac{C(x)}{\omega - x} dx$$

ed A rappresenta una costante arbitraria.

Risulta quindi:

$$l(x) = Ae^{-kx-\psi(x)}.$$

Poichè d'altra parte la costante A non ha nessuna influenza sul valore del vitalizio $\bar{a}(x, t, \delta)$, possiamo ritenere $A = 1$ e scrivere:

(9) $$l(x) = e^{-kx-\psi(x)}$$

e tale relazione determina la legge di sopravvivenza.

Come caso particolare dalla (9) per $C = m$ (costante) deduciamo la (2). Infatti con questa ipotesi troviamo:

$$e^{-\psi(x)} = e^{m \lg (\omega - x)} = (\omega - x)^m$$

e quindi:

$$l(x) = e^{-kx}(\omega - x)^m.$$

Viene provato in tal modo che l'espressione (9) è più generale della (2).