Bollettino Unione Matematica Italiana

Mario Manarini

Sulle geodetiche e sulle linee di curvatura sopra una superficie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.4, p. 208–211.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_4_208_0>

Sulle geodetiche e sulle linee di curvatura sopra una superficie.

Nota di Mario Manarini (a Bologna).

Sunto. - *In questa Nota l'Autore dimostra in modo assoluto. cioè senza l'uso delle coordinate, alcuni teoremi, in parte noti, sulle linee geodetiche e sulle linee di curvatura sopra ad una superficie.*

1. Vediamo come sia facile stabilire con il metodo vettoriale alcune proposizioni, in parte note, relative alle geodetiche ed alle linee di curvatura tracciate sopra a una superficie.

Sia $P(s)$ un punto variabile sopra a una superficie (σ), descrivente quindi una curva (L) di cui s è l'arco contato a partire da una certa origine; sia $\boldsymbol{n}$ il vettore unitario normale alla superficie in P, rivolto verso l'interno.

Se t è il vettore unitario diretto secondo la tangente alla (L) in P, nel senso degli archi crescenti, avremo come è noto

$$\frac{dP}{ds} = t, \tag{1}$$

Poniamo

$$b = t \wedge n; \tag{2}$$

con ciò, b risulta un vettore unitario parallelo al piano tangente alla (σ) in P. Derivando la (2) rispetto ad s abbiamo, per la (1),

$$P'' \wedge n = \frac{db}{ds} + \frac{dn}{dP} t \wedge t. \tag{3}$$

2. Supponiamo ora che (L) sia una geodetica di (σ); perciò avremo per essa l'equazione differenziale

$$P'' \wedge n = 0.$$

In tal caso b è la binormale della curva e dalla (3) deduciamo immediatamente che

$$\text{se è } \frac{db}{ds} = 0, \quad \text{è anche } \frac{dn}{dP} t \wedge t = 0,$$

oppure

$$\text{se è } \frac{dn}{dP} t \wedge t = 0, \quad \text{è anche } \frac{db}{ds} = 0.$$

Ricordando che $\frac{db}{ds}$ ha per grandezza la torsione (*formule di Frenet*) e che le linee di curvatura sopra a una superficie hanno per equazione differenziale [1]

$$\frac{dn}{dP} dP \wedge dP = 0 \quad \text{ossia} \quad \frac{dn}{dP} t \wedge t = 0,$$

si ricavano subito le note proprietà:

« *Se una geodetica è piana, essa è linea di curvatura* ».

« *Se una geodetica è linea di curvatura, essa è piana* ».

3. Supponiamo ora che la (L) sia una linea di curvatura di (σ) non geodetica, ossia si abbia

$$P'' \wedge n \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{dn}{dP} t \wedge t = 0.$$

[1] Cfr.: *Analisi vettoriale generale. - Geometria differenziale.* Vol. II, BURGATTI, parte I, pag. 36.

La (3) in tal caso si riduce a

$$P'' \wedge \boldsymbol{n} = \frac{d\boldsymbol{b}}{ds}. \tag{3'}$$

Sia $\boldsymbol{b}_1$ il vettore unitario secondo la binormale di questa linea in P; esso sarà nel piano di $\boldsymbol{b}$ e di $\boldsymbol{n}$ onde potremo porre:

$$\boldsymbol{b}_1 = p\boldsymbol{b} + q\boldsymbol{n}. \tag{4}$$

Derivando abbiamo

$$\frac{d\boldsymbol{b}_1}{ds} = \frac{dp}{ds}\boldsymbol{b} + \frac{dq}{ds}\boldsymbol{n} + p\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} + q\frac{d\boldsymbol{n}}{ds},$$

onde la (3') diviene

$$pP'' \wedge \boldsymbol{n} = \frac{d\boldsymbol{b}_1}{ds} - \frac{dp}{ds}\boldsymbol{b} - \frac{dq}{ds}\boldsymbol{n} - q\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}.$$

Trattandosi di una linea di curvatura $\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}$ è un vettore parallelo a $\boldsymbol{t}$, onde scrivendo la precedente nel seguente modo

$$pP'' \wedge \boldsymbol{n} + q\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{b}_1}{ds} - \frac{dp}{ds}\boldsymbol{b} - \frac{dq}{ds}\boldsymbol{n},$$

si scorge che il primo membro è un vettore parallelo a $\boldsymbol{t}$ ed il secondo membro è un vettore perpendicolare a $\boldsymbol{t}$. Dovendo risultare uguali sarà

$$pP'' \wedge \boldsymbol{n} + q\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{d\boldsymbol{b}_1}{ds} = \frac{dp}{ds}\boldsymbol{b} + \frac{dq}{ds}\boldsymbol{n}. \tag{6}$$

Dalla (5) per l'uguaglianza dei moduli otteniamo (sempre per le formule di FRENET)

$$p\frac{1}{\rho} = \operatorname{mod}\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} \tag{7}$$

ossia:

Il vettore $\frac{d\mathbf{n}}{ds}$ *lungo una linea di curvatura è parallelo a* $\mathbf{t}$ *ed il suo modulo vale la proiezione della flessione di quella linea sulla normale alla superficie, ossia vale ciò che può chiamarsi la flessione normale di quella curva* (1).

(1) Cfr. una mia Nota dal medesimo titolo pubblicata nei « Rendiconti della Reale Acc. dei Lincei », 2° semestre 1930, 1° fascicolo.

La (6) ci dà come espressione della curvatura di torsione della (L) (formule di Frenet)

$$(8)\qquad \frac{1}{\tau}=\sqrt{\left(\frac{dp}{ds}\right)^2+\left(\frac{dq}{ds}\right)^2} \quad \text{con} \quad p^2+q^2=1.$$

4. Supponiamo ancora che (L) sia una linea di curvatura e sia a torsione costante c. Per la (8) abbiamo

$$\frac{1}{\tau}=\sqrt{\left(\frac{dp}{ds}\right)^2+\left(\frac{dq}{ds}\right)^2}=c \quad \text{con} \quad p^2+q^2=1.$$

Da quest'ultima ricaviamo

$$p^2\left(\frac{dp}{ds}\right)^2-q^2\left(\frac{dq}{ds}\right)^2=0,$$

onde si ottiene facilmente

$$\left(\frac{dp}{ds}\right)^2=c^2q^2=c^2(1-p^2),$$

oppure

$$\left(\frac{dq}{ds}\right)^2=c^2(1-q^2).$$

Con facile integrazione, detto φ l'angolo tale che sia sen $\varphi=p$, ricaviamo

$$(9)\qquad \varphi=cs+\text{cost.}$$

cioè:

« *Se una linea di curvatura sopra una superficie è a torsione costante* c, *al variare del punto* P *il suo piano rettificante in* P *forma con la normale alla superficie in* P, *un angolo* φ *che è proporzionale all'arco descritto da* P *e la costante di proporzionalità è il valore* c *della torsione* ».

In altre parole:

« Al variare di P il triedro principale ad esso collegato ruota intorno alla tangente alla curva descrivendo angoli proporzionali agli archi descritti da P. Se P si muove uniformemente sulla curva il triedro principale ad esso collegato ha una specie di moto elicoidale intorno alla curva stessa ».

Notiamo infine che per la posizione fatta sen $p=\varphi$, la (8) diviene

$$\frac{1}{\tau}=\frac{d\varphi}{ds},$$

dalla quale deriva immediatamente la (9).