Giovanni Ricci

Determinazione de] massimo limite e del minimo limite della somma di funzioni periodiche continue, per la variabile indefinitamente crescente

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.4, p. 212–217.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_4_212_0>

Determinazione del massimo limite e del minimo limite della somma di funzioni periodiche continue, per la variabile indefinitamente crescente.

Nota di Giovanni Ricci (a Pisa).

Sunto. - *Si applicano noti teoremi di analisi diofantea al problema della determinazione del massimo limite e del minimo limite, per* $x \to +\infty$, *di una funzione* $f(x)$ *somma di funzioni periodiche continue* $f_0(x)$, $f_1(x), \ldots, f_n(x)$, *riconducendo il problema alla determinazione del massimo e del minimo, in un dominio rettangolare, di una funzione* $\Phi(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-h})$ *di* $n - h + 1$ *variabili indipendenti, periodica rispetto a ciascuna di esse, dove* h *è il numero (eventualmente nullo) delle combinazioni lineari nulle, linearmente indipendenti e a coefficienti interi, delle frequenze di* $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)$. *Si dànno due esempi. Si estendono i risultati alla somma di una serie uniformemente convergente di funzioni periodiche continue.*

1. Siano $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)$, $n+1$ funzioni della variabile reale x definite su tutto l'asse reale ed ivi finite, continue e periodiche (quindi limitate) di periodi rispettivamente $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (positivi). La loro somma

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_n(x) \tag{1}$$

risulta una funzione continua di x, definita su tutto l'asse reale e limitata. Cominciamo col dimostrare che ogni valore assunto da $f(x)$ è un suo valore limite per $x \to +\infty$, cioè in nessun caso $f(x)$, per $x \to +\infty$, subisce smorzamento; precisando:

Se $f(a) = A$, *fissati* K *e* σ *positivi arbitrarî esiste un punto* X *per cui si ha*

$$X > K; \quad |f(X) - A| < \sigma. \tag{2}$$

Per la (1), le (2) risulteranno soddisfatte se è

$$X > K; \quad |f_i(X) - f_i(a)| < \frac{\sigma}{n+1}, \qquad (i = 0, 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Le funzioni $f_i(x)$, essendo continue e periodiche, sono continue uniformemente su tutto l'asse reale, quindi è possibile determinare un numero ε positivo in guisa che in qualunque intervallo di ampiezza ε l'oscillazione di ogni funzione $f_i(x)$ sia minore di $\sigma/(n+1)$. Per soddisfare alle (3) è sufficiente determinare gli $n+1$ interi $p_0, p_1, \ldots, p_n$ in guisa da soddisfare alle condizioni

$$p_0 > \frac{K - a}{\lambda_0}; \quad \left| \frac{\lambda_0}{\lambda_k} - \frac{p_k}{p_0} \right| < \frac{\varepsilon}{p_0 \lambda_k}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

poichè infatti ponendo $X = a + p_0\lambda_0$ risultano in conseguenza soddisfatte le condizioni $X > K$, $|a + p_i\lambda_i - X| < \varepsilon$, ($i = 0, 1, \dots, n$), e, pel modo con cui si è scelto ε, tenendo presente la periodicità delle funzioni, vengono ad essere soddisfatte le (3). Il problema dunque si riduce alle (4).

È noto [1] che si possono determinare in infiniti modi, e perciò con p_0 comunque grande, le n frazioni p_k/p_0 ($k = 1, \dots, n$) in guisa da soddisfare alle diseguaglianze

$$\left|\frac{\lambda_0}{\lambda_k} - \frac{p_k}{p_0}\right| < \frac{1}{p_0 \sqrt[n]{p_0}}.$$

quindi basta scegliere tali frazioni con p_0 superiore a ciascuno dei numeri

$$\frac{K-a}{\lambda_0}, \quad \left(\frac{\lambda_1}{\varepsilon}\right)^n, \dots, \left(\frac{\lambda_n}{\varepsilon}\right)^n$$

perchè siano soddisfatte le (4), e quindi per $X = a + p_0\lambda_0$ anche le (2).

OSSERVAZIONI. Se $f(a) = A$, A è un valore limite di $f(x)$ per $x \to -\infty$. Se A è un valore limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$ lo è pure per $x \to -\infty$, quindi il massimo limite (minimo limite) di $f(x)$ per $x \to +\infty$ e quello per $x \to -\infty$ sono eguali.

2. Veniamo a determinare il massimo limite e il minimo limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$. Per questo, dobbiamo distinguere due casi secondochè le frequenze (cioè gl'inversi dei periodi)

$$\frac{1}{\lambda_0}, \frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} \tag{5}$$

sono razionalmente dipendenti oppure no, cioè secondochè esiste oppure no una combinazione lineare a coefficienti interi delle frequenze (5) nulla.

Quando i numeri (5) siano razionalmente dipendenti e legati dalle h, ($1 \leq h \leq n$), e non più relazioni linearmente indipendenti

$$c_{\nu 0}\frac{1}{\lambda_0} + c_{\nu 1}\frac{1}{\lambda_1} + \dots + c_{\nu n}\frac{1}{\lambda_n} = 0, \qquad (\nu = 1, \dots, h) \tag{6}$$

a coefficienti $c_{\nu i}$ interi, la matrice $\|c_{\nu i}\|$, ($\nu = 1, \dots, h$; $i = 0, 1, \dots, n$), ha caratteristica h e possiamo supporre non nullo ed eguale a δ

[1] Ved. O. PERRON, *Irrationalzahlen*, Leipzig, 1921, p. 13.

il determinante delle sue ultime h colonne in guisa da potere risolvere il sistema lineare

$$c_{\nu 0}\frac{\xi_0}{\lambda_0}+c_{\nu 1}\frac{\xi_1}{\lambda_1}+\ldots+c_{\nu n}\frac{\xi_n}{\lambda_n}=0, \qquad (\nu=1,\ldots, h)$$

rispetto alle quantità ξ_s/λ_s, $(s=n-h+1,\ldots, n)$, colle formole

$$(7) \qquad \xi_k=\lambda_k\left(\frac{\delta_{k0}}{\delta}\frac{\xi_0}{\lambda_0}+\ldots+\frac{\delta_{k,n-h}}{\delta}\frac{\xi_{n-h}}{\lambda_{n-h}}\right), \qquad (k=n-h+1,\ldots, n)$$

dove δ e δ_{ki} sono interi determinati. Diciamo μ_i (μ_i divisore di δ) il minimo comune multiplo dei denominatori delle h frazioni δ_{ki}/δ (ridotte ai minimi termini) che figurano nei secondi membri delle (7) come coefficienti di ξ_i/λ_i, $(i=0,\ldots, n-h)$, ed osserviamo che quando nei secondi membri delle (7) si sostituisca alla quantità ξ_i la quantità $\xi_i+\mu_i\lambda_i$ ogni ξ_k risulta aumentato di multipli di λ_k.

La *funzione ausiliaria*

$$(8) \qquad y=\Phi(\xi_0, \xi_1,\ldots, \xi_{n-h})=f_0(\xi_0)+f_1(\xi_1)+\ldots+f_n(\xi_n)$$

delle $n-h+1$ variabili reali indipendenti $\xi_0,\ldots, \xi_{n-h}$ (direttamente e composta mediante le (7)) risulta evidentemente definita per ogni $(n-h+1)$-upla reale $(\xi_0,\ldots, \xi_{n-h})$, continua e limitata; detti m_i e M_i $(i=0,\ldots, n)$ il minimo e il massimo di $f_i(x)$, e posto $m=m_0+$ $+m_1+\ldots+m_n$, $M=M_0+M_1+\ldots+M_n$ risulta

$$(9) \qquad m\leq\Phi(\xi_0, \xi_1,\ldots, \xi_{n-h})\leq M;$$

inoltre, per l'osservazione precedente la funzione Φ è periodica rispetto a ciascun argomento di periodi $\mu_0\lambda_0$, $\mu_1\lambda_1,\ldots$, $\mu_{n-h}\lambda_{n-h}$. Diciamo I il dominio rettangolare $[0\leq\xi_i\leq\mu_i\lambda_i, \ (i=0, 1,\ldots, n-h)]$.

Osserviamo infine che quando le frequenze (5) siano razionalmente indipendenti, cioè sia $h=0$, la (8) definisce y come funzione di $n+1$ variabili reali indipendenti $\xi_0, \xi_1,\ldots, \xi_n$, continua, limitata, periodica rispetto a ciascun argomento di periodi $\lambda_0, \lambda_1,\ldots, \lambda_n$, e soddisfacente alla (9); per questa funzione il dominio rettangolare I risulta $[0\leq\xi_i\leq\lambda_i, \ (i=0, 1,\ldots, n)]$ ed in esso assume ogni valore dell'intervallo (m, M).

3. TEOREMA. *Il massimo limite* l'' *e il minimo limite* l' *della funzione* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$, *per* $\mathrm{x}\to+\infty$, *sono rispettivamente il massimo e il minimo della funzione* $\Phi(\xi_0, \xi_1,\ldots, \xi_{n-h})$ *nel dominio rettangolare* **I**.

Per l'osservazione finale dell'articolo precedente segue subito: *Se le frequenze* (5) *sono razionalmente indipendenti il massimo limite e il minimo limite di* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *per* $\mathrm{x}\to+\infty$ *sono rispettivamente* *la somma* M *dei massimi e la somma* m *dei minimi delle funzioni* $f_i(x)$, $(i=0, 1,\ldots, n)$.

Se $f(a)=A$, dalle (6), (7), (8) risulta $\Phi(a, a,\ldots, a)=A$ e per la periodicità della funzione $\Phi(\xi_0,\ldots, \xi_{n-h})$ esiste in I un punto in cui essa assume il valore A.

La funzione $f(x)$ essendo continua assume tutti i valori dell'intervallo aperto (l', l''), quindi detti L' e L'' il minimo e il massimo della funzione *continua* $\Phi(\xi_0,\ldots, \xi_{n-h})$ in I, per la (9) e per l'osservazione che precede valgono le limitazioni $m\leq L'\leq l'\leq \leq l''\leq L''\leq M$. Per dimostrare le uguaglianze $L'=l'$, $L''=l''$ enunciate dal teorema è sufficiente mostrare che ogni valore assunto da $\Phi(\xi_0,\ldots, \xi_{n-h})$ in I è un valore limite di $f(x)$ per $x\rightarrow+\infty$.

Sia $(a_0, a_1,\ldots, a_{n-h})$ un punto di I per cui $\Phi(a_0, a_1,\ldots, a_{n-h})=A$. Se esiste un punto a per cui $f(a)=A$, A è un valore limite (art. 1); nel caso che non esista un tale punto a è sufficiente dimostrare che prefissato σ positivo arbitrario esiste un punto X_0 per cui

$$(10)\qquad |f(X_0)-A|<\sigma$$

poichè risultando $f(X_0)$ un valore limite di $f(x)$ per $x\rightarrow+\infty$, con σ arbitrariamente piccolo, anche A è un tal valore limite.

Posto in base alle (7)

$$(7')\qquad a_k=\lambda_k\left(\frac{\delta_{k0}}{\delta}\frac{a_0}{\lambda_0}+\ldots+\frac{\delta_{k,n-h}}{\delta}\frac{a_{n-h}}{\lambda_{n-h}}\right),\qquad (k=n-h+1,\ldots, n)$$

per la definizione (8) abbiamo $f_0(a_0)+f_1(a_1)+\ldots+f_n(a_n)=A$, dunque per giungere alla (10) è sufficiente mostrare che esiste un punto X_0 pel quale

$$(11)\qquad |f_i(X_0)-f_i(a_i)|<\frac{\sigma}{2(n+1)},\qquad (i=0, 1,\ldots, n).$$

Diciamo ε un numero positivo scelto in guisa che in ogni intervallo di ampiezza ε ogni funzione $f_i(x)$ abbia un'oscillazione inferiore a $\sigma/2(n+1)$; poichè denotando $p_0, p_1,\ldots, p_n$, $n+1$ interi positivi è $f_i(a_i+p_i\lambda_i)=f_i(a_i)$, detto ε' il minore degli n numeri ε/λ_k, $(k=1,\ldots, n)$, per soddisfare alle (11) è sufficiente determinare gl'interi p_i in guisa da soddisfare alle diseguaglianze

$$(12)\qquad \left|\frac{\lambda_0}{\lambda_k}p_0-p_k-\frac{a_k-a_0}{\lambda_k}\right|<\varepsilon',\qquad (k=1,\ldots, n)$$

nelle quali ε' è comunque piccolo; infatti possiamo porre $X_0=a_0+p_0\lambda_0$ e risulta per le (12), $|X_0-a_k-p_k\lambda_k|<\varepsilon$, $(k=1,\ldots, n)$, e per la conveniente scelta di ε seguono le (11) quindi la (10). Dunque perchè A

sia un valore limite è sufficiente potere soddisfare alle (12) con $p_0, p_1, \ldots, p_n$ interi e ε' comunque piccolo.

A questo punto distinguiamo due casi: Se le frequenze (5) sono razionalmente indipendenti è sempre possibile ([1]) soddisfare alle (12) con ε' arbitrario e p_i interi. Se le frequenze (5) sono legate dalle (6) è possibile ([1]) soddisfare alle (12) nel modo detto, allora ed allora soltanto che ammette soluzioni in interi $(g_0, g_1, \ldots, g_n)$ il sistema aritmetico

$$c_{\nu 0} g_0 + c_{\nu 1} g_1 + \ldots + c_{\nu n} g_n = c_{\nu 1} \frac{a_1 - a_0}{\lambda_1} + \ldots + c_{\nu n} \frac{a_n - a_0}{\lambda_n}, \quad (\nu = 1, \ldots, h).$$

Ma per le (6) e le (7') i secondi membri delle equazioni di questo sistema sono nulli, quindi esso ammette soluzioni in interi.

Il teorema enunciato risulta così completamente dimostrato.

OSSERVAZIONE. Se due funzioni $f_l(x)$, $f_k(x)$ delle $n+1$ date $f_0(x), \ldots, f_n(x)$ hanno i periodi λ_l, λ_k fra loro incommensurabili e ciascuna di esse possiede in un periodo un numero finito di punti di massimo la funzione $f(x) = f_0(x) + \ldots + f_n(x)$ raggiunge il valore M, somma dei massimi M_i delle $f_i(x)$, al più un numero finito di volte.

In particolare una combinazione lineare di seni e coseni, che non sia periodica, si trova nelle condizioni della funzione $f(x)$ di questa osservazione.

4. ESEMPI. Denotando con lim'' e lim' il massimo limite e il minimo limite, si calcola facilmente per

$$f(x) = \operatorname{sen}[2\pi x] + \operatorname{sen}[2\pi \cdot \sqrt{2} x] + \operatorname{sen}[2\pi(\sqrt{2}+1)x],$$

$$\varphi(x) = \operatorname{sen}[2\pi x] + \operatorname{sen}[2\pi \sqrt{2} x] + \operatorname{sen}[2\pi(\sqrt{2}+1)x] + \operatorname{sen}[2\pi(\sqrt{2}-1)x],$$

$$\lim_{x \to +\infty}{}' f(x) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}, \qquad \lim_{x \to +\infty}{}'' f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\lim_{x \to +\infty}{}' \varphi(x) = -(1+\sqrt{5}), \qquad \lim_{x \to +\infty}{}'' \varphi(x) = 1 + \sqrt{5}.$$

5. Siano $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots$ funzioni della variabile reale x definite su tutto l'asse reale ed ivi continue finite e periodiche (quindi limitate) di periodi $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ rispettivamente. Supponiamo che la serie $f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \ldots$ sia uniformemente convergente e denotiamone con $f(x)$ la somma, la quale risulta continua. Basandoci su ciò che precede e sull'uniforme convergenza della serie in questione si arriva facilmente alle proposizioni seguenti:

Se $f(a) = A$, A è un valore limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$.

([1]) Ved. O. PERRON, l. c., p. 157.

Se A è un valore limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$ lo è pure per $x \to -\infty$, quindi il massimo limite (il minimo limite) di $f(x)$ per $x \to +\infty$ e quello per $x \to -\infty$ sono eguali.

Se, comunque grande sia n, le frequenze (5) sono razionalmente indipendenti, allora si ha

$$\lim_{x \to +\infty}{}' f(x) = m_0 + m_1 + m_2 + \ldots, \qquad \lim_{x \to +\infty}{}'' f(x) = M_0 + M_1 + M_2 + \ldots$$

dove m_i e M_i sono il minimo e il massimo di $f_i(x)$.