Ugo Broggi

# Sullo sviluppo asintotico di una funzione razionale nulla all'infinito

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1*, Vol. **9** (1930), n.4, p. 217–222.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_4_217_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1930.

# Sullo sviluppo asintotico di una funzione razionale nulla all' infinito.

Nota di UGO BROGGI (a Milano).

**Sunto.** - *Si determina la funzione generatrice corrispondente ad una determinante razionale nulla, all' infinito, e qualunque.*

Si dimostrò altrove che [1], se

$$Q(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

e, come può sempre supporsi

$$\frac{1}{Q(x)} = \int_0^\infty e^{-tx} \varphi(t) dt \tag{1}$$

$\varphi(t)$ è la soluzione, che per $t = 0$ si annulla colle sue prime $n - 2$ derivate, mentre $\varphi^{(n-1)}(0) = 1$, dell' equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti di ordine $n$, di cui $Q(x) = 0$ è l' equazione caratteristica. E che, se

$$\varphi(t) = \frac{1}{\overline{n-1}!} t^{n-1} + \frac{c_n}{n!} t^n + \frac{c_{n+1}}{\overline{n+1}!} t^{n+1} + \dots$$

la serie

$$\frac{1}{x^n} + \frac{c_n}{x^{n+1}} + \dots$$

converge fuori del circolo

$$|x| = \text{massimo del modulo delle radici di } Q(x)$$

ha nel suo campo di convergenza il valore $\frac{1}{Q(x)}$ ed è sommata (ne

[1] In una Nota che apparirà nei Rend. del R. Ist. Lombardo.

senso di E. BOREL) da (1) nel semipiano

$$R(x) > \text{massimo della parte reale delle radici di } Q(x).$$

Ci proponiamo di considerare qui il caso più generale del quoziente $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se

$$P(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m$$

nell'ipotesi in cui sia $k = n - m > 0$. Ove si ponga

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \int_0^\infty e^{-tx}\varphi(t)dt, \tag{2}$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{k-1!} t^{k-1} + \frac{\gamma_k}{k!} t^k + \frac{\gamma_{k+1}}{k+1!} t^{k+1} + \dots$$

è la soluzione, che $x$ annulla colle sue $k-2$ prime derivate per $t = 0$, mentre

$$\varphi^{(k-1)}(0) = 1, \quad \varphi^{(k)}(0) = b_1 - a_1$$

$$\varphi^{(k+r)}(0) = b_{r+1} - a_{r+1} - a_r\varphi^{(k+r-1)}(0) - \dots - a_1\varphi^{(k)}(0)$$

$$(r = 1, 2, \dots, m-1)$$

dell'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti ordine $n$ di cui $Q(x) = 0$ è l'equazione caratteristica.

Come nel caso $\frac{1}{Q(x)}$ la serie

$$\frac{1}{x^k} + \frac{\gamma_k}{x^{k+1}} + \frac{\gamma_{k+1}}{x^{k+2}} + \dots \tag{3}$$

che corrisponde a $P(x)$, $Q(x)$, converge fuori del circolo

$$|x| = \text{massimo del modulo delle radici di } Q(x)$$

ed è sommata da (2) nel semipiano

$$R(x) > \text{massimo della parte reale delle radici di } Q(x).$$

**1.** Siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ le radici di $Q(x)$ supposte semplici.

E allora se $(c)$ è una linea chiusa contorno di un'area semplicemente connessa, che le contiene tutte

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{P(u)}{Q(u)} e^{tu} du = \sum_{h=1}^{n} \frac{P(\alpha_h)}{Q'(\alpha_h)} e^{t\alpha_h} = \varphi(t).$$

In particolare se la parte reale di $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ è $\leq \lambda$ ed è $\mu > \lambda$ può immaginarsi che la curva $(c)$ sia costituita dal segmento congiungente i punti $\mu - ik$, $\mu + ik$ e dalla semicirconferenza avente questo segmento come diametro e volta dalla parte del semiasse reale negativo.

Ove $k$ tenda all'infinito, la parte di integrale estesa alla circonferenza tende a zero, e si ha pertanto

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mu - i\infty}^{\mu + i\infty} e^{tu} \frac{P(u)}{Q(u)} du.$$

È noto che se $f(x)$ è un ramo monodromo di funzione analitica dato regolare nel semipiano $R(x) > \lambda$ ed esiste un numero reale $c$ tale che $f(x)e^{cx}$, per $x$ tendente all'infinito secondo le direzioni comprese fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{r}$ (incluse) tende uniformemente a zero di un ordine numericamente positivo, è anche, per $R(x) > \mu > \lambda$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_c^\infty e^{-tx} \int_{\mu - i\infty}^{\mu + i\infty} f(u) du dt \ (^1).$$

Le condizioni sono soddisfatte ove si supponga

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

e $c = 0$, e se ne ha pertanto

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \int_0^\infty e^{-tx} \varphi(t) dt$$

e quindi anche

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\varphi(0)}{x} + \frac{\varphi(0)}{x^2} + \dots + \frac{\varphi^{(h)}(0)}{x^{h+1}} + \frac{1}{x^{h+1}} \int_0^\infty \varphi^{(h+1)}(t) e^{-tx} dt$$

e poichè le $\varphi^{(h)}(t)$ sono di ordine finito e limitato qualunque sia $h$ e, nel semipiano che si considera,

$$\lim_{h=\infty} \frac{1}{x^h} \int_0^\infty \varphi^{(h)}(t) e^{-tx} dt = 0$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\varphi(0)}{x} + \frac{\varphi'(0)}{x^2} + \dots$$

(¹) Cfr. ad es. S. PINCHERLE, *Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche*, pag. 331.

fuori del circolo

$$|x| = \text{massimo del modulo delle radici di } Q(x),$$

nella parte, cioè, di piano in cui la funzione $\frac{P(x)}{Q(x)}$, regolare e nulla all'infinito, è regolare.

È poi evidentemente

$$\varphi^{(n)}(t) + a_1\varphi^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n\varphi(t) = 0$$

e se il grado $m$ del polinomio $P(x)$ è uguale a $n - k$ $(k > 0)$

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \ldots = \varphi^{(k-2)}(0) = 0, \quad \varphi^{(k-1)}(0) = 1$$

giacchè

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{\alpha_h^r P(\alpha_h)}{Q'(\alpha_h)} = \lim_{t \to \infty} \frac{t^{r+1}P(t)}{Q(t)}$$

e

$$\lim_{t \to \infty} \frac{t^{r+1}P(t)}{Q(t)}$$

è uguale a 1 se $r + 1 = k$, uguale a 0 se $r + 1 < k$.

Che sia poi anche

$$\varphi^{(k)}(0) = b_1 - a_1, \quad \varphi^{(k+r)}(0) = b_{r+1} - a_{r+1} - a_r\varphi^{(k+r-1)}(0) - \ldots - a_1\varphi^{(k)}(0)$$
$$(r = 1, 2, \ldots, k-1)$$

discende dal fatto che

$$\varphi(0), \ \varphi'(0), \ \varphi''(0), \ldots$$

sono i coefficienti dello sviluppo di $P(x)/Q(x)$ in serie di potenze decrescenti di $x$, onde si ha, qualunque sia $h$

$$\lim_{x \to \infty} x^{h+2}\left[\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{\varphi(0)}{x} - \frac{\varphi'(0)}{x^2} - \ldots - \frac{\varphi^{(h)}(0)}{x^{h+1}}\right] = \varphi^{(h+1)}(0).$$

**2.** Siano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ le radici di ordine $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$

$$\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r = n$$

di $Q(x)$ e si supponga dimostrato che alla funzione determinante $P(x)/Q(x)$ corrisponde la generatrice

$$\varphi(t) = p_1(t)e^{\alpha_1 t} + \ldots + p_r(t)e^{\alpha_r t}$$

dove $p_1(t), \ldots, p_r(t)$ sono polinomi di grado $\nu_1 - 1, \ldots, \nu_r - 1$ in $t$.

È

$$\frac{(x-\beta)P(x)}{(x-\alpha_1)Q(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{\beta - \alpha_1}{x - \alpha_1}\frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Poichè il prodotto $f_1(x) \cdot f_2(x)$ di due funzioni determinanti, di generatrice $\varphi_1(t)$ la prima, $\varphi_2(t)$ la seconda, è determinante, di generatrice

$$\int_0^t \varphi_1(u)\varphi_2(t-u)du = \int_0^t \varphi_1(t-u)\varphi_2(u)du \text{ [1]}$$

alla funzione determinante $\frac{1}{x-\alpha_1}\frac{P(x)}{Q(x)}$ corrisponde la generatrice

$$\psi(t) = \int_0^t \varphi(u)e^{\alpha_1(t-u)}du = \pi_1(t)e^{\alpha_1 t} + \pi_2(t)e^{\alpha_2 t} + \dots + \pi_r(t)e^{\alpha_r t}$$

dove $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r$ sono polinomi di grado $\nu_1, \nu_2 - 1, \dots \nu_r - 1$. Ed è

$$\frac{(x-\beta)P(x)}{(x-\alpha_1)Q(x)} = \int_0^\infty e^{-tx} \{ \varphi(t) - (\beta - \alpha_1)\psi(t) \} dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-tx}\Phi(t)dt$$

dove $\Phi(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti di cui

$$(x-\alpha_1)Q(x) = 0$$

è l'equazione caratteristica.

È evidente che il teorema che si dimostrò supponendo semplici le radici di $Q(x)$ si estende senz'altro al caso in cui $Q(x)$ è un polinomio arbitrario, e che le condizioni ai limiti rimangono inalterate.

**3.** Per definizione, se $\varphi(t) = a_0 + \frac{a_1}{1!}t + \dots$ è una funzione olomorfa in una parte infinita di piano alla quale appartiene il semiasse reale positivo

$$\int_0^\infty e^{-tx}\varphi(t)dt = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-u}\varphi\left(\frac{u}{x}\right)du$$

supposto esistente, è il valore, nel senso di E. Borel, della serie assintotica

$$\frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \dots$$

[1] Cfr. ad es. N. Nielsen, *Handbuch der Gammafunktion*, pag. 120.

L'integrale (2) prolunga analiticamente la serie (3) nella parte di piano comune all'esterno del circolo

$$|x| = \text{massimo del modulo delle radici di } Q(x)$$

ed al semipiano

$$R(x) > \text{massimo della parte reale delle radici di } Q(x).$$