Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Giuseppe Scorza Dragoni

Una proprietà di alcuni insiemi di punti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.4, p. 222–225.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_4_222_0>

Una proprietà di alcuni insiemi di punti.

Nota di G. SCORZA DRAGONI (a Napoli).

Sunto. - *In questa Nota viene indicato qualche tipo di insieme di punti tale che le sue porzioni aperte su di esso si proiettino (nel senso solito e in uno un po' più largo che verrà specificato) in porzioni della sua proiezione aperte nella sua proiezione.*

Di recente ho studiato una certa classe di funzioni, preoccupandomi di stabilire delle condizioni sufficienti per la loro semicontinuità (1). Lo studio di questo problema mi ha condotto a introdurre degli insiemi che godevano di certe proprietà; dal presentarsi di queste seguivano le conclusioni desiderate. E perchè la questione non sembrasse semplicemente spostata, ho addotto parecchi esempi di insiemi per cui queste proprietà erano verificate, riserbandomi di darne altrove le dimostrazioni relative. Cosa che mi propongo di espletare in questa Nota.

1. Sia I un insieme del piano xy e I_y la sua proiezione sull'asse y secondo una direzione diversa da quella dell'asse y.

Supponiamo, per semplicità, che gli estremi y_1 e y_2 di I_y siano diversi e entrambi al finito e consideriamo le rette r_1 e r_2 che passando per questi due punti hanno la direzione fissata: I sarà contenuto entro la striscia compresa fra queste due rette. Indichiamo poi con $r(x, y)$ la retta che passa per il punto (x, y) ed è parallela a r_1 e r_2.

Ciò posto dirigeremo la nostra attenzione sugli insiemi che soddisfanno alle limitazioni strutturali seguenti.

Ogni punto (x_0, y_0) di I che non appartenga a r_1 o r_2 dovrà essere estremo di due segmenti $s_1(x_0, y_0)$, $s_2(x_0, y_0)$ contenuti in I che abbiano in comune con la retta $r(x_0, y_0)$ solo il punto (x_0, y_0) e ne giacciano da parti opposte.

(1) G. SCORZA DRAGONI, ***Un problema sui minimi e sui massimi parziali di una funzione.*** « Rendiconti dei Lincei », serie IV, 1° sem. 1930.

Se (x_0, y_0) appartiene a r_1 o r_2, dei due segmenti $s_1(x_0, y_0)$ e $s_2(x_0, y_0)$ ne resterà uno solo: quello al di sopra di r_1, quello al di sotto di r_2.

Allora:

Ogni porzione I' *di* I *aperta su* I (1) *si proietta in una porzione* I'_y *di* I_y *aperta su* I_y,

ovvero, come diremo più brevemente,

I *gode della proprietà* a) *se si proietta sull'asse delle* y *secondo la direzione fissata* (2).

Infatti, se (x_0, y_0) è un punto di I' che non appartenga a r_1 o r_2, consideriamo i due segmenti $s_1(x_0, y_0)$, $s_2(x_0, y_0)$. Siccome I' è aperto su I, pur di scegliere in modo conveniente gli altri estremi di questi segmenti, e cioè abbastanza prossimi a (x_0, y_0), s_1 e s_2 apparterranno anche ad I'.

Ma allora sull'asse delle y esiste tutto un segmento, riempito da punti di I'_y, che contiene nel suo interno la proiezione di (x_0, y_0) secondo la direzione fissata.

In maniera analoga si riconosce che se (x_0, y_0) appartiene a r_1 o r_2 esiste un numero intero positivo δ tale che appartenga ad I'_y tutto il segmento $y_1 \leq y \leq y_1 + \delta$ o $y_2 - \delta \leq y \leq y_2$ e si ha senza altro che I'_y è aperto su I_y.

2. Se $I_1, \ldots, I_n$ sono n insiemi del tipo indicato e le loro proiezioni sull'asse y sono contenute nei segmenti $y_1 \leq y \leq y'_1, \ldots, y_n \leq y \leq y'_n$ e hanno gli stessi estremi di questi segmenti, posto $I = I_1 \dotplus \ldots \dotplus I_n$, *il teorema enunciato continua a sussistere*

Se riesce

$$y'_1 < y_2, \quad y'_2 < y_3, \ldots, \quad y'_{n-1} < y_n;$$

e anche:

Quando, pur essendo una, o più, delle disuguaglianze precedenti, $y'_i < y_{i+1}$, *sostituita dalla* $y'_i = y_{i+1}$, I_i *e* I_{i+1} *hanno gli stessi punti in comune con la retta che passa per il punto* $(0, y'_i)$ *ed ha la direzione secondo cui si esegue la proiezione sull'asse* y.

Quanto abbiamo detto si estende facilmente a insiemi che si proiettano in insiemi illimitati. Per gli insiemi che si proiettano in punti isolati, tutte queste osservazioni sono banali.

3. In base al criterio del n.° 1 si ricava subito che:

Qualunque sia la direzione, purchè diversa da quella dell'asse y,

(1) Vedasi Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, p. 59.

(2) Vedremo più avanti che il godere della proprietà *a)* dipende dalla direzione di proiezione.

secondo cui lo si proietta sull'asse y, *ogni insieme aperto gode della proprietà* a).

Inoltre è chiaro che un insieme convesso soddisfa alle condizioni indicate, quindi:

Anche ogni insieme convesso gode della proprietà a) *rispetto a qualsiasi direzione di proiezione.*

La proiezione sull'asse y secondo una direzione prestabilita di un insieme convesso è sempre un intervallo, chiuso, aperto o semiaperto; orbene:

Se gli n *insiemi convessi* $I_1, \ldots, I_n$ *si proiettano sull'asse* y *secondo una certa direzione in uno stesso intervallo, l'insieme* $I' \doteq I_1 \dotplus \ldots \dotplus I_n$ *gode della proprietà* a) *se si proietta sull'asse* y *secondo quella direzione.*

Infatti anche in questo caso I' soddisfa alle condizioni di struttura indicate al n.° 1.

4. Ma allora se $I'_1, \ldots, I'_n$ sono n insiemi del tipo di I', e, secondo una certa direzione, si proiettano in insiemi contenuti nei segmenti $y_1 \leq y \leq y'_1, \ldots, y_n \leq y \leq y'_n$, l'insieme $I' = I'_1 \dotplus \ldots \dotplus I'_n$ gode della proprietà *a)* rispetto alla direzione fissata.

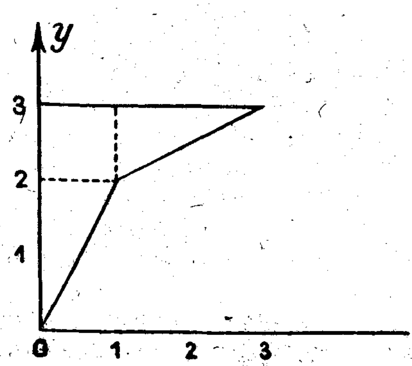
Se riesce

$$y'_1 < y_2, \ldots, \quad y'_{n-1} < y_n;$$

oppure, se alcune delle disuguaglianze precedenti sono sostituite da uguaglianze, $y'_i = y_{i+1}$,

Quando coincidono le parti delle frontiere di I_i *e* I_{i+1} *contenute nella retta che passa per* $(0, y'_i)$ *con la direzione fissata.*

Così l'insieme



gode della proprietà *a)* se si proietta ortogonalmente sull'asse y [1].

[1] Non ne gode se si proietta secondo la direzione della retta che unisce il punto (1, 2) al punto (3, 3). Cfr. la mia Nota già citata.

5. Il teorema del n.° 1 è suscettibile di diverse estensioni che rientrano nell'ordine di idee che ho già svolto nella mia nota citata; di queste indicherò una delle più semplici.

Supponiamo che in I sia definita una funzione continua, non costante, $z(x, y)$, di estremi m ed M e che per ogni punto (x_0, y_0) di I per il quale sia $m < z(x_0, y_0) < M$ passino due segmenti s_1 e s_2, contenuti in I, in ciascuno dei quali la z non assume due volte il valore $z(x_0, y_0)$, avendo nel primo un minimo minore di $z(x_0, y_0)$ e nel secondo un massimo maggiore di $z(x_0, y_0)$. Se poi risultasse $z(x_0, y_0) = m$, oppure $z(x_0, y_0) = M$, dovranno esistere rispettivamente il secondo o il primo dei segmenti indicati. Allora:

L'insieme I'_z *dei valori che la* $z(x, y)$ *assume in una porzione* I' *di* I *aperta su* I *è aperto sull'insieme* I_z *dei valori che* $z(x, y)$ *assume in tutti i punti di* I.

Il teorema è sempre vero, ma è banale se $z(x, y)$ è costante o assume un numero finito di valori. Può esser generalizzato, seguendo l'indirizzo sviluppato al n.° 2.

6. Fondendo questo teorema con altri risultati esposti nella mia Nota citata si ha che, ferme restando le ipotesi fatte,

Se $f(x, y)$ *è inferiormente semicontinua in* I, *posto* $e''(\bar{z})$ *uguale all'estremo superiore della* f *nella porzione* $S(\bar{z})$ *di* I *in cui è* $z(x, y) = \bar{z}$, $e''(z)$ *è inferiormente semicontinua in* I_z,

insieme a risultati analoghi che completano il parallelismo che mi son sforzato di mantenere nello studio delineato nella mia Nota lincea.