Bollettino Unione Matematica Italiana

Letterio Laboccetta

Espressione analitica della funzione f limitata ad a e b, $[f]_a^b$

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.4, p. 225–229.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_4_225_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1930.

Espressione analitica della funzione f limitata ad a e b, $[f]_a^b$.

Nota di LETTERIO LABOCCETTA (a Roma).

Sunto. - *La funzione* $[f]_a^b$ *presenta la caratteristica di avere espressioni analitiche diverse nei diversi intervalli del campo di variazione della funzione* f(x); *si mostra che ciò nondimeno essa é esprimibile con una combinazione lineare di funzioni discontinue elementari, seguendo lo stesso metodo, esposto in precedenti scritti, per la rappresentazione di funzioni che hanno espressioni analitiche diverse in diversi intervalli del campo di variazione della variabile* x.

1. Vien chiamata « *funzione* f *limitata ad* a e b » e designata con $[f]_a^b$ (¹) una funzione $F(x)$ uguale a $f(x)$ quando il valore di $f(x)$

(¹) C. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensembles, classes de Baire,* (1916), p. 35.

è compreso nell'intervallo (a, b) ma uguale ad a se $f(x) \leq a$ ed uguale a b se $f(x) \geq b$ (1).

Restano così determinati tre insiemi valori di x, vale a dire gl'insiemi nei quali si ha rispettivamente $f(x) \leq a$, $a < f(x) < b$ $f(x) \geq b$ e vengono adoperate per designare questi tre insiemi le notazioni (2)

$$E_1[F(x) = a], \quad E_2[a < F(x) < b], \quad E_3[F(x) = b]. \tag{1}$$

Di esse si servono anche quegli Autori che, non avendo adottato il simbolo $[f]_a^b$, descrivono questa funzione assegnando il gruppo di relazioni

$$\left\{ \begin{array}{lll} F(x) = f(x) & \text{su} & E[a < f(x) < b] \\ F(x) = a & \text{»} & E[f(x) \leq a] \\ F(x) = b & \text{»} & E[f(x) \geq b] \end{array} \right. \tag{2}$$

alle quali deve soddisfare (3).

2. In considerazione dell'importanza della detta funzione ritengo non inutile indicarne una espressione analitica (4) adoperando a tale scopo la funzione discontinua Ix, *intiero di* x, di LEGENDRE, della quale mi sono già avvalso in modo analogo in alcuni precedenti miei scritti.

Considerando un intervallo nel quale la funzione non è mai negativa, e supponendo che a e b siano due numeri positivi, si ha come espressione di $F(x)$

$$\begin{aligned} aI\frac{3a}{2a + f(x)} + f(x)I\frac{3(b-a)^2}{2(b-a)^2 + \{a+b-2f(x)\}^2} + bI\frac{3f(x)}{2b + f(x)} \\ - aI[1 + \{a - f(x)\}^2]^{-1} - bI[1 + \{b - f(x)\}^2]^{-1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Ciascuno dei primi tre termini di questa espressione corrisponde ad uno degli insiemi (1) e consiste in un prodotto di due fattori dei quali il primo è il valore $(a, f(x), b)$ che deve prendere la funzione $F(x)$ e l'altro è una funzione uguale ad 1 nell'insieme

(1) R. BAIRE, *Leçons sur les fonctions discontinues*, (1905), p. 110.

(2) H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, 2me édition, (1928), p. 108.

(3) C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, 2te Aufl., (1927), p. 395. Si noti però che invece della lettera E (iniziale di *ensemble*) è adoperata la lettera M (iniziale di *Menge*).

(4) La possibilità di una espressione analitica non è accennata in alcuna delle opere citate.

di cui si tratta ed a zero nel suo complementare, vale a dire che è la « *funzione caratteristica* » dell'insieme (1).

Ne segue che la somma di questi tre termini risulta uguale ad a, $f(x)$, b secondo che x appartiene rispettivamente ad uno degli insiemi E_1, E_2, E_3, ma la stessa somma diventa uguale a $2a$ quando $f(x)=a$ ed uguale a $2b$ quando $f(x)=b$. Per eliminare queste due discordanze servono i due termini correttivi aggiunti che sono nulli *quasi dappertutto* salvo nell'insieme dei punti dove $f(x)=a$ nei quali il primo è uguale ad a e nell'insieme dei punti dove $f(x)=b$ nei quali il secondo è uguale a b. Dunque questi due termini sono le funzioni caratteristiche dei detti due insiemi, funzioni costruite seguendo i metodi generali indicati nel mio precedente scritto sulle « *funzioni puntiformi* » (2).

3. Invece della funzione Ix possono essere adoperate altre funzioni per costruire d'una maniera analoga una espressione di $[f]_a^b$ ed in particolare le due funzioni

$$\text{sem sgn}\, x = \frac{e x^{k^2}}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha \,\text{sen}\, x\alpha + k^2 \cos x\alpha}{k^4+\alpha}\, d\alpha = \begin{cases} 0 & \text{per } x<0 \\ \frac{1}{2} & \text{»} \quad x=0 \\ 1 & \text{»} \quad x>0 \end{cases} \tag{4}$$

$$\text{Dir}\, x = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\text{sen}\,\alpha}{\alpha}\cos x\alpha\, d\alpha = \begin{cases} 0 & \text{per } |x|>1 \\ \frac{1}{2} & \text{»} \quad |x|=1 \\ 1 & \text{»} \quad |x|<1. \end{cases} \tag{5}$$

Gl'integrali definiti che appariscono in queste funzioni sono ben noti (3), essendo fra quelli considerati da FOURIER nella *Théorie analytique de la Chaleur*.

In quanto alle funzioni stesse, la (4) chiamata spesso « *funzione dei telegrafisti* » è « *equivalente* » (4) alla « *funzione unità* » di HEAVISIDE (5). La (5) non è altro che il « *fattore discontinuo di*

(1) C. DE LA VALLÉE POUSSIN, op. cit., p. 7.

(2) Pubblicato in questo « Bollettino », vol. VIII, n.° 5, dicembre 1929.

(3) V. ad es, fig. 32, p. 464 e fig. 31, p. 459, vol. I di J. HOÜEL, *Cours de Calcul Infinitésimal*, (1878), o fig. 5, p. 35 e fig. 4, p. 30 di RIEMANN-HATTENDORFF, *Partielle Differentialgleichungen*, 3te Aufl., (1882).

(4) Cioè *uguale tranne che in corrispondenza di un insieme di punti di misura nulla*, v. C. KARATHÉODORY, op. cit., p. 389; qui il detto insieme si riduce al solo punto $x=0$.

(5) Per la *unit function* v. il Cap. I di E. J. BERG, *Heaviside's Functional Calculus*, (1929).

Dirichlet ». L'indicazione abbreviata $\mathrm{Dir}\, x$ per la (5) e la denominazione « *semi segno di x* » insieme con la corrispondente notazione $\mathrm{sem\,sgn}\, x$ sono state da me proposte in una comunicazione al Congresso dei Matematici di Bologna del 1928 [1].

Tenendo conto dei valori che assumono nei diversi intervalli le due funzioni (4), (5) si scorge che la $F(x)$ può essere semplicemente espressa dal trinomio

$$(6)\qquad a\,\mathrm{sem\,sgn} \left| a - f(x) \right| + f(x)\,\mathrm{Dir} \left\{ \frac{a + b - 2f(x)}{2(b-a)} \right\} + \\ + b\,\mathrm{sem\,sgn} \left| f(x) - b \right|$$

ed i due termini correttivi non sono più necessari, poichè per $f(x) = a$, $(f(x) = b)$ il primo ed il secondo (il secondo ed il terzo) termine divengono entrambi contemporaneamente uguali a $\frac{1}{2}a$, $\left(\frac{1}{2}b\right)$.

4. Le due espressioni (3) e (6) sono notevoli non solo perchè esse mostrano che la « *fonction* f *bornée à* a *et* b » è suscettibile di una effettiva rappresentazione analitica, ma anche per i motivi seguenti.

Dalla struttura della (3) risulta anzitutto che i termini correttivi adoperati possono servire a rendere identiche non solo due funzioni semplicemente equivalenti, cioè che differiscono solo in corrispondenza di un insieme di punti di misura nulla, ma anche due funzioni che differiscono in corrispondenza di un insieme di misura non nulla, la forma dei termini correttivi restando inalterata.

Ed evidente pure è che inalterate restano entrambe le espressioni (3), (6) quale che sia il numero degli intervalli nei quali la funzione $F(x)$ ha una espressione analitica diversa ed infatti:

1°) Se $f(x)$ è sempre crescente per x variabile da $-\infty$ a $+\infty$, come per es. e^x, si hanno solamente tre intervalli $(-\infty, \log a)$, $(\log a, \log b)$, $(\log b, +\infty)$ nei quali la funzione $F(x)$ ha per espressioni $y = a$, $y = e^x$, $y = b$.

2°) Se si pone $f(x) = Ix^{-2}$, ed a e b sono due numeri interi positivi, si hanno due intervalli $\left(-\infty, \frac{-1}{a}\right)$ e $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ nei quali $F(x)$ coincide con $y = a$, un intervallo $\left(\frac{-1}{b}, \frac{1}{b}\right)$ nel quale coincide con $y = b$ ed un numero d'intervalli $n = 2(b - a)$ in cia-

[1] Intorno a un metodo per la costruzione di queste funzioni, v. una mia Nota « R. C. Acc. Naz. dei Lincei », 1° dicembre 1929.

scuno dei quali coincide con $y = \frac{1}{m}$, m essendo uno degli intieri compresi fra a e b.

3°) Se si pone [1] $f(x) = I(\mathrm{Fr}\,x)^{-1}$, $a = 0$, $b = n$ (n intiero e positivo) si hanno in ogni intervallo unitario, compreso fra due intieri successivi, $m < x < m + 1$, n intervalli nei quali $F(x)$ coincide con $y = p$, p essendo uno degli intieri $< n$, e, siccome si tratta di una funzione periodica si ha dunque, in questo caso, una infinità numerabile d'intervalli senza che il numero o la forma dei termini di (3) o (6) siano cambiati.

Infine è importante notare che la (3) e la (6) forniscono un esempio della estensione del metodo di *interpolazione segmentale* già da me considerato [2] al caso in cui invece del campo di variazione della variabile indipendente x, è il campo di variazione della funzione $f(x)$ stessa da rappresentare che è diviso in intervalli nei quali la funzione ha espressioni analitiche diverse.

[3] CRUDELI, *Le problème statique fondamental du solide sphérique* ecc. (« Acta Mathematica », tome 53, a. 1930).