BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

FILIPPO ODONE

Sopra un'equazione integrale che si presenta nel problema della deformazione d'una sfera elastica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.4, p. 229–232.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_4_229_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1930.

Sopra un'equazione integrale che si presenta nel problema della deformazione d'una sfera elastica.

Nota di FILIPPO ODONE (a Torino).

Sunto. - *Risoluzione con integrali definiti, applicando una formula stabilita dal prof.* BOGGIO, *di un'equazione integrale, da cui dipende il problema di determinare la deformazione di una sfera elastica isotropa conoscendo gli spostamenti in superficie.*

In una nota recentissima il prof. CRUDELI [3], appoggiandosi a risultati stabiliti anteriormente da L. LICHTENSTEIN, ha mostrato che il problema di determinare la deformazione di una sfera elastica isotropa S, per dati spostamenti superficiali, si può ricondurre alla risoluzione dell'equazione integrale

$$\Theta_P - \frac{k}{4\pi R}\int_\sigma \frac{\Theta_M}{r_{MP}}\, d\sigma_M = \Phi_P, \tag{1}$$

ove σ indica la superficie sferica limitante la sfera S, il cui raggio indichiamo con R, P è un punto qualsiasi della superficie σ, M è

[3] CRUDELI, *Le problème statique fondamental du solide sphérique* ecc. (« Acta Mathematica », tome 53, a. 1930).

un altro punto di σ e costituisce la variabile d'integrazione, $d\sigma_M$ è l'elemento d'area in M, Θ è la dilatazione cubica, Φ è una funzione data nei punti P di σ, r è la distanza dei punti M e P, k è una costante espressa da $k = (\lambda + \mu)/(\lambda + 3\mu)$, essendo λ e μ le note costanti elastiche di LAMÉ relative al solido S.

Nella nota citata, il prof. CRUDELI risolve l'equazione (1) per mezzo di sviluppi in serie di funzioni sferiche: si può però anche risolvere la (1) in modo semplicissimo con integrali definiti, come mi propongo di far vedere in questa nota: si ottiene così per la dilatazione cubica l'equazione già precedentemente trovata da vari autori con altri metodi.

Il metodo che adopero è fondato sopra una formula semplicissima, che fu già utilmente usata dal prof. BOGGIO per risolvere con integrali definiti il problema dell'induzione magnetica nel caso di una sfera isotropa ([1]).

***

Notiamo in primo luogo che dalla equazione (1), che vale in ogni punto della superficie σ, si può dedurre subito un'equazione valida in ogni punto Q interno alla sfera. Infatti osservando che Θ_Q è funzione armonica nei punti Q di S e chiamando F_Q il valore in Q della funzione armonica in S e che nei punti P della superficie σ coincide con Φ_P, dalla (1) si ha senz'altro l'equazione

$$\Theta_Q - \frac{k}{4\pi R}\int_\sigma \frac{\Theta_M}{r_{MQ}}\, d\sigma_M = F_Q, \tag{2}$$

valida in tutti i punti della sfera S.

Ciò posto, consideriamo la funzione

$$U_Q = \int_\sigma \frac{\Theta_M}{r_{MQ}}\, d\sigma_M, \tag{3}$$

che è la funzione potenziale di uno strato semplice disteso sulla superficie σ con densità Θ_M in ogni punto M di σ; questa funzione

([1]) BOGGIO, *Nouvelle résolution du problème de l'induction magnétique pour une sphère isotrope.* (« Comptes Rendus de l'Académie des Sciences », tome 142, a. 1906), oppure: *Nuova risoluzione del problema dell'induzione magnetica per una sfera isotropa.* (« Nuovo Cimento », serie V, vol. XI, a. 1906). Cfr. pure: BOGGIO, *Trasformazione di alcune funzioni potenziali,* n. 6. (« Rend. del Circolo Matematico di Palermo », tomo XXII, a. 1906 soddisfa in ogni punto Q della sfera alla nota equazione (che è la formula a cui sopra si è alluso):

$$\frac{1}{2} U_Q + \rho \frac{dU_Q}{d\rho} = 2\pi R \Theta_Q, \tag{4}$$

ove ρ è la distanza del punto Q di S del centro O della sfera.

Sostituendo ora nella (2) a Θ_Q il valore dato dalla (4) e all'integrale il suo valore (3), si ha (omettendo l'indice Q)

$$\frac{1}{2\pi R}\left(\frac{1}{2} U + \rho \frac{dU}{d\rho}\right) - \frac{k}{4\pi R} U = F,$$

ossia

$$\frac{1-k}{2} U + \rho \frac{dU}{d\rho} = 2\pi R F, \tag{5}$$

che si può scrivere

$$\rho^{\frac{1+k}{2}} \frac{d}{d\rho}\left(\rho^{\frac{1-k}{2}} U\right) = 2\pi R F;$$

ora la quantità $(1-k)/2$ è positiva, perchè espressa per mezzo delle costanti di LAMÉ vale $\mu/(\lambda+3\mu)$, quindi dalla precedente, integrando, si ricava, come è noto:

$$U = 2\pi R \rho^{\frac{k-1}{2}} \int_0^\rho \rho^{-\frac{1+k}{2}} F d\rho. \tag{6}$$

Poichè la (2) ci dà

$$\Theta = F + \frac{k}{4\pi R} U,$$

sostituendo qui ad U il suo valore (6) abbiamo la dilatazione cubica Θ espressa per mezzo di integrali definiti; e in tal modo anche l'equazione (1) è risolta per mezzo di integrali definiti.

Dopo ciò si ottengono subito, come ben si sa, sempre mediante integrali definiti, le componenti dello spostamento in ogni punto interno alla sfera elastica isotropa S.

OSSERVAZIONI. 1ª) La soluzione con integrali definiti del problema della deformazione della sfera elastica, come già si è accennato, è nota da molto tempo grazie ai lavori di vari autori italiani, in particolare dell'ALMANSI.

2ª) Il problema del moto lento stazionario di un liquido viscoso entro uno spazio chiuso limitato da una sfera, considerato dal prof. CRUDELI in una nota dei « Rendiconti dell'Istituto Lombardo » dell'anno 1929, ove è risolto per mezzo di serie, è un caso particolare del problema dell'equilibrio elastico della sfera, perchè basta dare alla costante d'elasticità un opportuno valore (cfr. BOGGIO, *Sul moto stazionario lento di un liquido viscoso.* « Rendiconto R. Accad. dei Lincei », a. 1910): si ottiene così la soluzione con integrali definiti di tale problema, problema d'altra parte risolto in modo diretto dal prof. BOGGIO pure con integrali definiti (cfr. BOGGIO, *Sul moto stazionario lento di una sfera in un liquido viscoso.* « Rendic. Circ. Matem. di Palermo », 2° semestre, a. 1910).