
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ANTONIO MAMBRIANI

Sulle successioni non uniformemente convergenti

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 9 (1930), n.4, p. 234–234.*

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_4_234_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sulle successioni non uniformemente convergenti.

Nota di ANTONIO MAMBRIANI (a Bologna).

Sunto. - L'A. dà un esempio di successione non uniformemente convergente, in relazione ad un proposizione del sig. J. C. VIGNAUX.

Nel n.° 3 (1930) di questo « Bollettino » il sig. J. C. VIGNAUX ⁽¹⁾ ha enunciato, ed ha creduto di aver dimostrato, la seguente proposizione:

Se le funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ..., date in un intervallo chiuso (a, b) , sono tali che sia, in ogni punto x di (a, b) ,

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq \dots$$

e che la funzione limite $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ sia continua, la convergenza della successione è uniforme in tutto l'intervallo considerato.

L'ultimo passaggio della dimostrazione data dal VIGNAUX è evidentemente errato; ma è pure errata la proposizione stessa, come mostra il seguente esempio.

Poniamo, nell'intervallo $(0, 1)$,

$$f_n(0) = 1,$$

$$f_n(x) = 0, \quad \text{per } 0 < x < \frac{1}{n},$$

$$f_n(x) = 1, \quad \text{per } \frac{1}{n} \leq x \leq 1.$$

Si ha, evidentemente, in ogni punto x di $(0, 1)$,

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1.$$

La funzione limite $f(x)$ è dunque continua in tutto $(0, 1)$; ma la convergenza della successione delle $f_n(x)$ non è affatto uniforme in $(0, 1)$.

La proposizione più sopra riportata risulta vera se si aggiunge la condizione che le $f_n(x)$ siano tutte continue nell'intervallo (a, b) . Ma, in tale caso, mentre la dimostrazione del VIGNAUX resta ancora errata, la proposizione si riduce ad un classico teorema del DINI.

(1) *Sulle successioni uniformemente convergenti*, pp. 168-169.