Bollettino Unione Matematica Italiana

Paolo Cattaneo

Sulle superficie parallele

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.4, p. 235–237.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_4_235_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1930.

Sulle superficie parallele.

Nota di PAOLO CATTANEO (a Padova).

Sunto. - *L'A. dimostra alcuni teoremi sulle coppie di superficie parallele, partendo dall'osservazione che le parallele di una superficie* W *sono tutte superficie* W.

1. Sia S una superficie, non piana, nè sferica, e sia S_0 una superficie ad essa parallela, di equazioni

$$x_0 = x - hX, \quad y_0 = y - hY, \quad z_0 = z - hZ.$$

Ovviamente (¹) si esprimono le curvature K_0 ed H_0 di S_0 in funzione delle K ed H di S. Si ha

$$K_0 = \frac{K}{1 - hH + h^2K} \quad \text{ed} \quad H_0 = \frac{H - 2hK}{1 - hH + h^2K};$$

donde scende tosto

$$(H_0 : K_0) = (H : K) - 2h, \quad \text{ossia} \quad s_1 + s_2 = r_1 + r_2 - 2h,$$

se si indicano con r_1 ed r_2 i raggi principali di curvatura di S e con s_1 ed s_2 quelli di S_0.

Di quì si vede subito che *le parallele di una superficie* W *sono tutte superficie* W. In particolare, se sopra S la somma dei raggi principali di curvatura è costante, lo stesso accade su tutte le sue parallele e fra esse una, ed una soltanto, è minima, quella che corrisponde ad $h = \frac{r_1 + r_2}{2}$.

2. Mi propongo di dimostrare che tale superficie minima è l'evoluta media di S; sicchè *ogni superficie minima è l'evoluta media di ogni sua parallela: unico caso di parallelismo fra una superficie e la sua evoluta media.*

L'unico caso di parallelismo con applicabilità è dato invece da *due superficie equidistanti da una superficie minima.*

Se S è minima, posto $r_1 = -r_2 = \rho$, si ha

$$s_1 = \rho - h, \quad s_2 = -\rho - h$$

ed alle linee $K = \text{cost.}$ su S corrispondono su S_0 le linee $K_0 = \text{cost.}$.

(¹) Cfr. CATTANEO, *Nozioni fondamentali sulle superficie parallele* (« Giornale di Battaglini », 1905).

Anzi *la corrispondenza, su due superficie parallele, delle linee lungo le quali resta invariata la curvatura totale è caratteristica per le coppie di superficie parallele* W.

3. Per dimostrare il primo nostro asserto, supposto $r_1 + r_2$ costante, $h = \frac{r_1 + r_2}{2}$ e quindi S_0 minima, indichiamo con Σ l'evoluta media di S. Essa è inviluppata dal piano condotto per $P(x_0, y_0, z_0)$ parallelamente al piano tangente alla S in $P(x, y, z)$.

Ma i piani tangenti ad S e ad S_0 rispettivamente in P e in P_0 sono paralleli. Le superficie S_0 e Σ sono dunque inviluppate dagli stessi piani; quindi coincidono. c. d. d.

È poi manifesto che, se S è parallela alla sua evoluta media Σ, deve essere $\frac{r_1 + r_2}{2}$ costante, quindi $r_1 + r_2$ costante e Σ coincidente con la superficie minima S_0 parallela alla S. c. d. d.

4. Supponiamo ora S minima, ossia $H = 0$.

Si ha $K_0 = \frac{K}{1 + h^2 K}$ e si vede che, corrispondentemente a due valori opposti di h, si hanno curvature totali eguali. Due superficie parallele, equidistanti da una superficie minima, sono dunque fra loro applicabili.

Se, viceversa, due superficie parallele S_1 ed S_2 sono fra loro applicabili (con sovrapposizione dei punti corrispondenti), indicando con $2d$ la loro distanza e con S la loro superficie mediana, da $K_1 = K_2$, se si pone $h = \pm d$ nell'espressione di K_0, si ha

$$\frac{K}{1 - dH + d^2K} = \frac{K}{1 + dH + d^2K},$$

donde $-dH = dH$ e quindi $H = 0$. c. d. d.

5. Se S è minima, oltre ad essere $r_1 = -r_2 = 1 : \sqrt{-K} = \rho$, si ha, come abbiamo asserito,

$$s_1 = r_1 - h = \rho - h \quad \text{ed} \quad s_2 = r_2 - h = -\rho - h.$$

Infatti si ha

$$H = 0, \quad r_1 + r_2 = 0, \quad s_1 + s_2 = -2h; \quad K_0 = K : (1 + h^2K);$$

$$K_0 = \frac{1}{s_1 s_2}; \quad K = \frac{1}{r_1 r_2}; \quad s_1 s_2 = (1 + h^2K) : K = r_1 r_2 + h^2 = h^2 - \rho^2;$$

$$(s_1 - s_2)^2 = (s_1 + s_2)^2 - 4 s_1 s_2 = 4\rho^2;$$

e quindi, se

$$s_1 > s_2, \quad s_1 - s_2 = 2\rho\,; \quad s_1 = \rho - h, \quad s_2 = -\rho - h, \quad \text{c. d. d.}$$

Se lungo una linea l di S si ha costante ρ e quindi K, lungo la linea corrispondente l_0 di S_0 restano poi costanti s_1 ed s_2, quindi anche K_0, come fu asserito.

6. Più in generale è manifesto che, se S ed S_0 sono due superficie W, ad ogni linea l di S lungo la quale non varia K, e quindi nemmeno H, corrisponde su S_0 una linea l_0 lungo la quale K ed H sono costanti.

Supponiamo, viceversa, che alle linee $K = \text{cost.}$ di S corrispondano le linee $K_0 = \text{cost.}$ di S_0. Prese queste linee come coordinate $u = \text{cost.}$, sia dunque $\dfrac{\partial K}{\partial u} = \dfrac{\partial K_0}{\partial u} = 0$. Essendo

$$\frac{\partial K_0}{\partial u} = \left[hK\frac{\partial H}{\partial u} + (1 - hH)\frac{\partial K}{\partial u}\right] : (1 - hH + h^2K)^2,$$

tale ipotesi, se si esclude il caso banale $K = K_0 = 0$, porta ad affermare che, assieme a $\dfrac{\partial K}{\partial u} = 0$, si ha $\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0$, ossia che H e K sono funzioni di una stessa variabile e quindi funzioni una dell'altra.

Restano così provate tutte le asserzioni fatte nel n.° 2.