

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

UMI

## Corrispondenza

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie  
1, Vol. 9 (1930), n.4, p. 244–245.*

Unione Matematica Italiana

<[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1930\\_1\\_9\\_4\\_244\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_4_244_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

## CORRISPONDENZA

### RISPOSTE

41. Per fissare le idee, supponiamo che l'intervallo  $(a, b)$  sia finito e che si abbia  $f(a) \geq 0$ . Indicando con  $p(x)$  e  $n(x)$  le variazioni positiva e negativa della  $f(x)$  nell'intervallo  $(a, x)$ , abbiamo, per ogni  $x$  di  $(a, b)$ ,

$$f(x) = |f(a) + p(x)| - n(x),$$

onde

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \int_a^b |f(a) + p(x)|\varphi(x)dx - \int_a^b n(x)\varphi(x)dx$$

e, per il secondo teorema della media,

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = |f(a) + p(b)| \int_{x_1}^b \varphi(x)dx - n(b) \int_{x_2}^b \varphi(x)dx,$$

$x_1$  e  $x_2$  essendo punti convenienti dell'intervallo  $(a, b)$ . Ne segue

$$\left| \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \right| \leq |f(a) + p(b)| \left| \int_{x_1}^b \varphi(x)dx \right| + n(b) \left| \int_{x_2}^b \varphi(x)dx \right| \\ \leq |f(a) + p(b) + n(b)| \theta,$$

dove  $\theta$  rappresenta un determinato valore compreso fra  $\left| \int_{x_1}^b \varphi dx \right|$  e

$\left| \int_{x_2}^b \varphi dx \right|$ . Per la continuità di  $\int_x^b \varphi dx$  rispetto ad  $x$ , esiste fra  $x_1$  e  $x_2$ , almeno un valore  $x_3$  (contenuto dunque in  $(a, b)$ ) in cui è esattamente

$$\theta = \left| \int_{x_3}^b \varphi dx \right|.$$

Si ha perciò

$$\left| \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \right| \leq (M + V) \left| \int_{x_3}^b \varphi dx \right|,$$

ed anche, per un certo  $x_4$ , appartenente all'intervallo  $(x_3, b)$ ,

$$\left| \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \right| = (M + V) \left| \int_{x_4}^b \varphi dx \right|.$$

Se ne deduce che, se i due integrali qui scritti hanno ugual segno, è

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = (M + V) \int_{x_4}^b \varphi dx,$$

e, se hanno segni contrari,

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = (M + V) \int_b^{x_4} \varphi dx.$$

In tutti i casi, esistono pertanto due punti  $\xi$  e  $\eta$ , di  $(a, b)$ , per i quali è

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = (M + V) \int_{\xi}^{\eta} \varphi dx.$$

OSSERVAZIONE. Se si ponesse la condizione  $\xi < \eta$ , la formula precedente non sarebbe vera in tutti i casi. Infatti, se si suppone  $\varphi(x) \equiv 1$  e  $\int_a^b f(x)dx < 0$ , la formula considerata darebbe necessariamente  $\eta < \xi$  (\*).

*l. t.*

(\*) Un'altra risposta alla questione 41, giuntaci con qualche ritardo, verrà pubblicata nel prossimo fascicolo. (N. d. R)