UMI

Corrispondenza

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.4, p. 244–245.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_4_244_0>

CORRISPONDENZA

RISPOSTE

41. Per fissare le idee, supponiamo che l'intervallo (a, b) sia finito e che si abbia $f(a) \geq 0$. Indicando con $p(x)$ e $n(x)$ le variazioni positiva e negativa della $f(x)$ nell'intervallo (a, x), abbiamo, per ogni x di (a, b),

$$f(x) = \{f(a) + p(x)\} - n(x),$$

onde

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \int_a^b \{f(a) + p(x)\}\varphi(x)dx - \int_a^b n(x)\varphi(x)dx$$

e, per il secondo teorema della media,

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \{f(a) + p(b)\}\int_{x_1}^b \varphi(x)dx - n(b)\int_{x_2}^b \varphi(x)dx,$$

x_1 e x_2 essendo punti convenienti dell'intervallo (a, b). Ne segue

$$\left|\int_a^b f(x)\varphi(x)dx\right| \leq \{f(a) + p(b)\}\left|\int_{x_1}^b \varphi(x)d(x)\right| + n(b)\left|\int_{x_2}^b \varphi(x)dx\right|$$
$$\leq \{f(a) + p(b) + n(b)\}\,\theta,$$

dove θ rappresenta un determinato valore compreso fra $\left|\int_{x_1}^b \varphi dx\right|$ e $\left|\int_{x_2}^b \varphi dx\right|$. Per la continuità di $\int_x^b \varphi dx$ rispetto ad x, esiste fra x_1 e x_2, almeno un valore x_3 (contenuto dunque in (a, b)) in cui è esattamente

$$\theta = \left|\int_{x_3}^b \varphi dx\right|.$$

Si ha perciò

$$\left|\int_a^b f(x)\varphi(x)dx\right| \leq (M+V)\left|\int_{x_3}^b \varphi dx\right|,$$

ed anche, per un certo x_4 appartenente all'intervallo (x_3, b),

$$\left|\int_a^b f(x)\varphi(x)dx\right| = (M+V)\left|\int_{x_4}^b \varphi dx\right|.$$

Se ne deduce che, se i due integrali qui scritti hanno ugual segno, è

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = (M+V)\int_{x_4}^b \varphi dx,$$

e, se hanno segni contrari,

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = (M+V)\int_b^{x_4} \varphi dx.$$

In tutti i casi, esistono pertanto due punti ξ e η, di (a, b), per i quali è

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = (M+V)\int_\xi^\eta \varphi dx.$$

Osservazione. Se si ponesse la condizione $\xi < \eta$, la formula precedente non sarebbe vera in tutti i casi. Infatti, se si suppone $\varphi(x) \equiv 1$ e $\int_a^b f(x)dx < 0$, la formula considerata darebbe necessariamente $\eta < \xi$ (*). *l. t.*

(*) Un'altra risposta alla questione 41, giuntaci con qualche ritardo, verrà pubblicata nel prossimo fascicolo. *(N. d. R)*