Bollettino Unione Matematica Italiana

Antonio Mambriani

Sulla risoluzione delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.5, p. 274–278.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_5_274_0>

Sulla risoluzione delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.

Nota di ANTONIO MAMBRIANI (a Bologna).

Sunto. - *Come applicazione della sua* Algebra delle successioni, *l'A. deduce, per un'equazione differenziale, lineare, a coefficienti costanti, una formula risolutiva che dà l'integrale generale direttamente a mezzo dei coefficienti della equazione stessa.*

Mi riferisco, qui, ad un'equazione differenziale, lineare,

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = \beta(x), \tag{1}$$

nella quale i coefficienti a_0, $a_1, \dots, a_n$ sono delle costanti (indipendenti, cioè, dalla variabile x) e la $\beta(x)$ è una funzione analitica di x. Come applicazione della mia *Algebra delle successioni* [1], deduco, per questa equazione, una formula risolutiva che dà l'integrale generale direttamente a mezzo dei coefficienti a_s e della $\beta(x)$, senza fare intervenire le radici — che non sempre si sanno determinare — della così detta « equazione caratteristica ».

1. Rammentiamo, dapprima, che *l'integrale generale* $y(x)$ *della equazione* (1) *si può sempre scrivere nella forma*

$$y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \frac{(x - x_0)^\nu}{\nu!}, \tag{2}$$

dove $x = x_0$ *è un punto qualunque in cui* $\beta(x)$ *è regolare, e* c_ν $(\nu = 0, 1, 2, \dots)$ *è la soluzione generale dell'equazione ricorrente*

$$a_0 c_{\nu+n} + a_1 c_{\nu+n-1} + \dots + a_{n-1} c_{\nu+1} + a_n c_\nu = \beta^{(\nu)}(x_0). \tag{3}$$

Come si sa dalla teoria generale delle equazioni differenziali lineari, la serie del secondo membro di (2) converge certamente nel cerchio di convergenza dell'elemento, relativo al punto x_0, della funzione analitica $\beta(x)$; in particolare, tale serie converge sicuramente per ogni valore finito di x, se la $\beta(x)$ è una funzione intera (o, come caso speciale, se è $\beta(x) \equiv 0$).

[1] A. MAMBRIANI, *Sull'Algebra delle successioni*. Memoria 1ª, « Annali di Matematica pura ed applicata », serie IV, tomo VIII (1930), pp. 103-139; Memoria 2ª, in corso di stampa negli stessi « Annali ».

2. La equazione ricorrente (3) permette di calcolare successivamente quanti si vogliono elementi c_ν ($\nu = n$, $n+1$, $n+2$,...) a mezzo degli n primi elementi arbitrari $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ (²). *Le espressioni così ottenute di* $c_n, c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots$ *si possono generalizzare, determinando — ed in modo elementare — l'espressione dell'elemento generale* c_ν.

Per mostrare ciò, indichiamo con (b_ν) la successione

$$b_0, \quad b_1, \ldots, \quad b_{n-1}, \quad b_n = \beta(x_0), \quad b_{n+1} = \beta'(x_0), \quad b_{n+2} = \beta''(x_0), \ldots,$$

dove i primi n elementi sono delle costanti *arbitrarie*, e notiamo che l'equazione (3) è equivalente al sistema

$$(4) \qquad \begin{cases} a_0 c_0 = b_0, \\ a_0 c_1 + a_1 c_0 = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_0 c_{n-1} + a_1 c_{n-2} + \ldots + a_{n-1} c_0 = b_{n-1}, \\ a_0 c_\nu + a_1 c_{\nu-1} + \ldots + a_{n-1} c_{\nu-n+1} + a_n c_{\nu-n} = b_\nu, \quad (\nu = n,\ n+1,\ n+2, \ldots). \end{cases}$$

Questo sistema, introducendo le successioni *unitarie* (ε_ν), $(\varepsilon_{\nu-1})$, $(\varepsilon_{\nu-2})$,... della nominata « Algebra delle successioni » (³), e adoperando la notazione di *moltiplicazione isobarica* (⁴), si può scrivere compendiosamente nella forma

$$(a_0 \varepsilon_\nu + a_1 \varepsilon_{\nu-1} + \ldots + a_n \varepsilon_{\nu-n}) \overset{\cdot}{\nu} c_\nu = b_\nu,$$

da cui, facendo uso della notazione di frazione isobarica (⁵),

$$(5) \qquad c_\nu = \frac{b_\nu}{a_0 \varepsilon_\nu + a_1 \varepsilon_{\nu-1} + \ldots + a_n \varepsilon_{\nu-n}} \Big|\, \nu,$$

(²) Fissato un sistema particolare di valori per $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, si può prevedere il numero degli elementi $c_n, c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots$ che *basta* calcolare per avere il corrispondente integrale particolare, dato da (2), con una determinata approssimazione [cfr., nel caso $\beta(x) \equiv 0$, É. Goursat, *Cours d'Analyse mathématique*, t. II (1925), p. 457, Remarque].

(³) Loc. cit. in (¹), Memoria 1ª, n.º 2. Il primo elemento delle successioni che consideriamo s'ottiene sempre facendo $\nu = 0$, e le successioni (ε_ν), $(\varepsilon_{\nu-1})$, $(\varepsilon_{\nu-2})$,..., sopra richiamate, sono definite dalle posizioni

$$\ldots = \varepsilon_{-2} = \varepsilon_{-1} = 0, \quad \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = 0.$$

(⁴) Ibid., n.º 4. Se (a_ν) e (c_ν) sono due date successioni, si pone, per brevità.

$$\sum_{r=0}^{\nu} a_{\nu-r} c_r = a_\nu \overset{\cdot}{\nu} c_\nu,$$

dove il secondo membro ci dà la notazione di « moltiplicazione isobarica ».

(⁵) Ibid., n.º 23.

dove il secondo membro ha sempre senso per essere $a_0 \neq 0$ (6).
La (5) dà la cercata espressione di c_ν.

Dalla (5) si possono dedurre, poi, per c_ν, delle espressioni che non contengono più l'indicazione di divisione isobarica. Invero, applicando le formule esprimenti $(a_0\varepsilon_\nu + a_1\varepsilon_{\nu-1} + \dots + a_n\varepsilon_{\nu-n})^{-1})_\nu$ razionalmente a mezzo di $a_0, a_1, \dots, a_n$ (7), si ha da (5):

$$c_\nu = \sum_{s=0}^{\nu} b_{\nu-s} \sum_{r=0}^{s} \frac{(-1)^r}{a_0^{r+1}} A_{r,s}, \tag{6}$$

dove si è posto

$$A_{r,s} = \sum_{r_1=0}^{r} \sum_{r_2=0}^{r_1} \dots \sum_{r_{n-1}=0}^{r_{n-2}} \binom{r}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\dots\binom{r_{n-2}}{r_{n-1}} a_1^{r-r_1} a_2^{r_1-r_2} \dots a_{n-1}^{r_{n-2}-r_{n-1}} a_n^{r_{n-1}} \varepsilon_{s-\rho}$$

con $\rho = r_1 + r_2 + \dots + r_{n-1}$, oppure

$$A_{r,s} = \sum \frac{r!}{r_1! \dots r_n!} a_1^{r_1} \dots a_n^{r_n},$$

la sommatoria essendo estesa a tutti i sistemi di n numeri interi, positivi o nulli, $r_1, r_2, \dots, r_n$, tali che sia

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + \dots + r_n = r, \\ r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n = s. \end{cases}$$

In particolare, per $n = 1$ si ha

$$c_\nu = \sum_{s=0}^{\nu} (-1)^s \frac{a_1^s}{a_0^{s+1}} b_{\nu-s}; \tag{6'}$$

per $n = 2$ è

$$c_\nu = \sum_{s=0}^{\nu} b_{\nu-s} \sum_{r=0}^{s'} (-1)^r \binom{r}{s-r} \frac{a_1^{2r-s} a_2^{s-r}}{a_0^{r+1}}, \tag{6''}$$

dove s' indica il massimo intero contenuto in $s:2$; per $n=3$ si ha

$$c_\nu = \sum_{s=0}^{\nu} b_{\nu-s} \sum_{r=0}^{s} \sum_{\rho=0}^{r'} (-1)^r \binom{r}{\rho}\binom{\rho}{s-r-\rho} \frac{a_1^{r-\rho} a_2^{r+2\rho-s} a_3^{s-r-\rho}}{a_0^{r+1}}, \tag{6'''}$$

dove r' indica il massimo intero contenuto in $(s-r):2$; e così via (8).

(6) Ibid., n.° 22.

(7) Loc. cit. in (1), Memoria 2ª, n.° 60.

(8) Per maggiori particolari sulla risoluzione delle equazioni ricorrenti, secondo la via ora seguita, si potrà consultare un mio lavoro di prossima pubblicazione.

3. Sostituendo in (2) le espressioni di c_ν date da (5) o (6), si ottiene la nominata *formula risolutiva, dell'equazione* (1), *che dà l'integrale generale direttamente a mezzo dei coefficienti dell'equazione stessa.* In questa formula si deve ricordare solo che $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ sono delle costanti *arbitrarie* e che è

$$b_{\nu+n} = \beta^{(\nu)}(x_0) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

$x = x_0$ essendo un punto qualunque in cui $\beta(x)$ è regolare. In particolare, sostituendo in (2) le espressioni di c_ν date da (6'), (6''), (6''') si ottengono gli integrali generali dell'equazione (1) rispettivamente per $n = 1, 2, 3$.

4. Osservazione. Mostrerò infine — incidentalmente e, del resto, come applicazione di ciò che precede — una deduzione rapida delle osservazioni sulle funzioni razionali fratte, che il prof. U. Broggi ha fatto in questo e nel precedente fascicolo di codesto « Bollettino ».

Consideriamo, col Broggi, la funzione razionale fratta

$$(7) \qquad \frac{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n} \qquad (m \leq n-1),$$

il cui sviluppo in serie di potenze di x^{-1} è della forma

$$(8) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{x^{\nu+n-m}}.$$

I coefficienti γ_ν, in (8), costituiscono, come è ben noto, la soluzione particolare, del sistema (4) precedente, che s'ottiene prendendo per $b_0, b_1, \ldots, b_m$ proprio i coefficienti del numeratore di (7) e facendo poi $b_{m+1} = b_{m+2} = b_{m+3} = \ldots = 0$ (in base a ciò che precede, sappiamo poi scrivere l'espressione effettiva di questi coefficienti γ_ν). Ne segue, per la proposizione del n.° 1 (nel caso $\beta(x) \equiv 0$, $x_0 = 0$), che la serie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu \frac{x^\nu}{\nu!}$$

ci dà un integrale particolare dell'equazione differenziale (1) avente $\beta(x) \equiv 0$; sarà quindi, pure, un integrale particolare di tale equazione la funzione (intera)

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu \frac{x^{\nu+n-m-1}}{(\nu+n-m-1)!},$$

dove il secondo membro non è altro che la serie associata, nel senso PINCHERLE-BOREL, della (8). In base alla teoria generale delle funzioni determinanti, consegue poi che la (7) è definibile coll'integrale di LAPLACE

$$(9) \qquad \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-xt} dt \quad (^9).$$

Da queste conclusioni (che sono quelle del BROGGI nella Nota del fascicolo precedente) e dalla proposizione del n.° 1 (sempre nel caso $\beta(x) \equiv 0$, $x_0 = 0$) discende poi, subito, la condizione necessaria e sufficiente enunciata dal BROGGI nella Nota di questo fascicolo.

(9) È chiaro che, indicato con ρ il massimo modulo e con λ la massima parte reale delle radici di $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, i campi di convergenza di (8) e (9) sono dati, rispettivamente, da $|x| > \rho$, $R(x) > \lambda$.