UMI

Corrispondenza

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.5, p. 308–310.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_5_308_0>

CORRISPONDENZA

RISPOSTE

41. - **1.** *Nell' intervallo finito* p $\vdash\!\dashv$ q *la* f(x) *sia a variazione limitata, la* φ(x) *sommabile; sia* m *l' estremo superiore del modulo di* f(x), v *la sua variazione totale,* δ *il massimo modulo dell' integrale*

$$\Phi(x) = \int_p^x \varphi(t)dt \quad \left(\text{o dell' altro } \Phi_1(x) = \int_x^q \varphi(t)dt\right)$$

al variare di x *in* p $\vdash\!\dashv$ q. *Sarà allora:*

$$(1) \qquad \left|\int_p^q f(x)\varphi(x)dx\right| \leq (m+v)\delta.$$

DIM. — Fissato un qualunque $\varepsilon > 0$ si determinano facilmente i valori crescenti $x_0 = p$, x_1, $x_2, \ldots$, $x_n = q$ tali che in ciacuno degli intervalli aperti $x_i \vdash\!\dashv x_{i+1}$ la variazione totale di $f(x)$ sia $< \varepsilon$. A più forte ragione sarà allora, per ogni x in $x_i \vdash\!\dashv x_{i+1}$

$$|f(x) - f(x_i + 0)| < \varepsilon.$$

Ne segue:

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\varphi(x)dx - f(x_i+0)\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x)dx\right| < \varepsilon \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\varphi(x)|\,dx$$

ossia:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\varphi(x)dx = f(x_i+0)\Phi(x_{i+1}) - f(x_i+0)\Phi(x_i) + \vartheta_i\varepsilon\int_{x_i}^{x_{i+1}} |\varphi(x)|\,dx, \quad (|\vartheta_i| < 1).$$

Sommando rispetto ad i, da 0 a $s-1$, si ha:

$$\int_p^q f(x)\varphi(x)dx = -\sum_0^{s-1} \Phi(x_{i+1})[f(x_{i+1}+0) - f(x_i+0)] +$$

$$+ f_n(x_{-1}+0)\Phi(q) + \vartheta\varepsilon\int_p^q |\varphi(x)|\,dx, \qquad |\vartheta| < 1$$

e di qui facilmente:

$$\left|\int_p^q f(x)\varphi(x)dx\right| \leq \delta v + \delta m + \varepsilon\int_p^q |\varphi(x)|\,dx,$$

e, per l'arbitrarietà di ε, la tesi.

2. *Se nell'intervallo* a⁀b *la* $\varphi(x)$ *è a integrale convergente e la* $f(x)$ ***a variazione limitata, anche la*** $f(x)\varphi(x)$ *è* ***a integrale convergente in*** a⁀b.

Dim. — Detti M e V l'estremo superiore del modulo e la variazione totale di $f(x)$ in a⁀b, si ha, da (1):

$$\left|\int_p^q f(x)\varphi(x)dx\right| \leq (M+V)\delta\,; \tag{2}$$

ma per $p \rightarrow \infty$ e $q > p$ è $\delta \rightarrow 0$, quindi una delle condizioni di convergenza per $f(x)\varphi(x)$ è soddisfatta. Ed analogamente per l'altra.

3. L'ipotesi della convergenza dell'integrale di $\varphi(x)$ permette di estendere la definizione di esso ad a⁀b o a qualunque sua parte a⁀c o c⁀b; posto allora

$$\Theta(x) = \int_a^x \varphi(t)dt$$

la $\Theta(x)$ è definita e continua nell'intervallo chiuso a|⁀|b, e quindi vi ammette massimo, minimo, oscillazione, tutti finiti. Se Δ è l'oscillazione, l'incremento

$$\Theta(\eta) - \Theta(\xi) = \int_\xi^\eta \varphi(t)dt$$

prende ogni valore da $-\Delta$ a $+\Delta$, estremi inclusi.

Risulta ora immediato il teorema proposto. Dalla (2), per $p \rightarrow a$, $q \rightarrow b$, essendo $\delta \leq \Delta$, si ha:

$$\left|\int_a^b f(x)\varphi(x)dx\right| \leq (M+V)\Delta$$

ossia:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \vartheta(M+V)\Delta \qquad \text{con } |\vartheta| < 1$$

$$= (M+V)\int_\xi^\eta \varphi(x)dx$$

per convenienti valori di ξ e di η.

4. Il procedimento del n.° 1, con qualche complemento, conduce agevolmente alla nota formula di integrazione per parti dell'integrale di STIELTJES:

$$\int_p^q \Phi(x)df(x) = \Phi q f(q) - \int_p^q f(x)\varphi(x)dx.$$

Ricavando di qui il secondo integrale e maggiorandone il modulo, si ottiene subito la (1) e quindi il teorema proposto, di cui quella formula sembra pertanto l'origine più naturale.

GUIDO ASCOLI

DOMANDE

42. Nel Tomo 37, pag. 188 dell'« American Monthly », è data la seguente espressione approssimata per la lunghezza dell'ellisse di semi-assi a e b:

$$S = \frac{\pi}{2}\left[a + b + 2\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}\right].$$

Si desidererebbe sapere se esistono allo scopo altre formule semplici, e quale è l'ordine della approssimazione fornita.

(x)