Bollettino Unione Matematica Italiana

Filippo Sibirani

Il segno di $f'''(x)$ caratterizza qualche proprietà geometrica per la curva $y = f(x)$?

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.1, p. 12–13.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_1_12_0>

Il segno di $f'''(x)$ caratterizza qualche proprietà geometrica per la curva $y = f(x)$?

Nota di FILIPPO SIBIRANI (a Bologna).

Sunto. - *Il segno di* f'''(x) *indica la maggiore rapidità dello staccarsi della curva* y = f(x) *dalla tangente a destra o a sinistra del punto di tangenza.*

1. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale definita in un dato intervallo ed ivi avente le derivate degli ordini che interessa di considerare. Conduciamo la tangente alla curva $y = f(x)$ nel punto $P_0[x_0, f(x_0)]$ e indichiamo con y_{ts} l'ordinata alla tangente anzidetta nel punto di ascissa $x_0 - h$ $(h > 0)$, con y_{td} l'ordinata alla stessa tangente nel punto di ascissa $x_0 + h$, con y_{cs} l'ordinata alla curva in $x_0 - h$, con y_{cd} l'ordinata alla curva in $x_0 + h$.

È manifestamente

$$y_{cd} - y_{td} = \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \frac{h^4}{4!} f^{\text{IV}}(x_0 + \vartheta_1 h),$$

$$y_{cs} - y_{ts} = \frac{h^2}{2} f''(x_0) - \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \frac{h^4}{4!} f^{\text{IV}}(x_0 - \vartheta_2 h),$$

$$0 < \vartheta_1 < 1 ; \quad 0 < \vartheta_2 < 1,$$

onde

$$(y_{cd}-y_{td})-(y_{cs}-y_{ts})=\frac{h^3}{3}f'''(x_0)+\frac{h^4}{4!}\{f^{IV}(x_0+\vartheta_1 h)-f^{IV}(x_0-\vartheta_2 h)\}.$$

Le distanze dei punti $P_1[x_0-h,\ f(x_0-h)]$ e $P_2[x_0+h,\ f(x_0+h)]$ dalla tangente in P_0 sono proporzionali a $y_{cs}-y_{ts}$ e $y_{cd}-y_{td}$, onde:

Se $f'''(x_0)\neq 0$, *la differenza fra le distanze di* P_1, P_2 *dalla tangente in* P_0 *è infinitesima di 3° ordine rispetto ad* h.

Ed è chiaro che se le derivate d'ordine dispari fossero nulle in x_0 a cominciare dalla terza fino a quella di ordine $2r-1$, mentre fosse $f^{(2r+1)}(x_0)\neq 0$, detta differenza diviene infinitesima di ordine $2r+1$ rispetto ad h.

2. Supposto $f'''(x_0)\neq 0$, per h sufficientemente piccolo il segno della differenza

$$(y_{cd}-y_{td})-(y_{cs}-y_{ts})$$

è quello di $f'''(x_0)$; da ciò:

Se la curva $y=f(x)$ *volge in* P_0 *in alto la concavità, in un intorno sufficientemente piccolo di* P_0 *la curva si stacca dalla tangente in* P_0 *più rapidamente a destra che a sinistra se* $f'''(x_0)>0$ *e più rapidamente a sinistra che a destra se* $f'''(x_0)<0$ *; il contrario avviene se la curva volge in basso la concavità.*

Qualora sia $f'''(x_0)$, $f^{V}(x_0)=0,\ldots,\ f^{(2r-1)}(x_0)=0$, $f^{(2r+1)}(x_0)\neq 0$, il segno di $f^{(2r+1)}(x_0)$ dà luogo alla stessa proprietà a cui dà luogo il segno di $f'''(x_0)$.

3. Supponiamo $f(x)$ sviluppabile in serie di Taylor nell'intorno di x_0. È

$$(y_{cd}-y_{td})-(y_{cs}-y_{ts})=2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{h^{2r+1}}{2r+1\,!}f^{(2r+1)}(x_0). \tag{1}$$

Se la curva ha un arco simmetrico rispetto alla ordinata a P_0 con simmetria parallela alla tangente in P_0, le distanze di P_1 e di P_2 dalla tangente in P_0 sono eguali per h minori di un conveniente numero a e quindi nullo il primo membro della (1) per qualunque $h<a$; ne consegue che:

Se la curva $y=f(x)$ *ha un arco simmetrico rispetto all'ordinata a* P_0 *con simmetria parallela alla tangente in* P_0, *tutte le derivate di ordine dispari di* $f(x)$ *a cominciare dalla terza sono nulle in* x_0.