Antonio Mambriani

Sugli sviluppi, dati dallo Schwatt, di $\sec^p x$ e $\tan^p x$

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.1, p. 17–20.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_1_17_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1931.

Sugli sviluppi, dati dallo Schwatt, di $\sec^p x$ e $\operatorname{tg}^p x$.

Nota di ANTONIO MAMBRIANI (a Bologna).

Sunto. - *L'A. indica una deduzione semplice degli sviluppi, dati dal sig.* I. J. SCHWATT, *di* $\sec^p x$ *e di* $\operatorname{tg}^p x$.

Il sig. I. J. SCHWATT ha pubblicato recentemente due Note: una, nei « Rendiconti della R. Accad. dei Lincei » ([1]), avente per oggetto la determinazione effettiva dello sviluppo di $\sec^p x$ (p intero positivo) in un'ordinaria serie di potenze di x, l'altra, in « The Tôhoku Mathematical Journal » ([2]), avente per oggetto la determinazione effettiva di un analogo sviluppo per $\operatorname{tg}^p x$. Queste Note mi hanno deciso a mostrare qui che tali sviluppi — come del resto molti altri — si possono ottenere con grande semplicità applicando la mia *Algebra delle successioni* ([3]) [per maggiore chiarezza ho fatto di volta in volta, in ciò che segue, particolareggiati richiami a tale « Algebra »]. La determinazione *effettiva* dei detti sviluppi ha interesse, sopratutto, perchè si perviene così ad *espressioni esplicite* di certi numeri notevoli — i coefficienti degli sviluppi stessi — che già sono stati definiti a mezzo di relazioni ricorrenti; numeri che si presentano spontaneamente in questioni importanti di Calcolo delle differenze finite e che vengono anche sfruttati in Aritmetica superiore.

1. Dalle ben note formule

$$\sec x = \frac{2}{e^{ix} + e^{-ix}}, \quad \operatorname{tg} x = -i\,\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}},$$

risulta che si può scrivere, essendo p un intero positivo e $|x| < \frac{\pi}{2}$,

$$\text{(1)} \qquad \sec^p x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(ix)^n}{n!}, \quad \operatorname{tg}^p x = (-i)^p \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \frac{(ix)^n}{n!},$$

([1]) I. J. SCHWATT, *Lo sviluppo di* $\sec^p x$ *in serie di Maclaurin*. « Rend. R. Accad. Lincei », Vol. XI (1930), pp. 665-667. Cfr. anche, dello stesso Autore, *Expression for the Euler numbers obtained by expanding* $\sec x$ *by means of Maclaurins theorem*. « Math. Zeitschr. », Bd. 31 (1929), pp. 151-158.

([2]) I. J. SCHWATT, *The expansion of* $\tan^p x$ *by Maclaurin's theorem* « Tôhoku Math. Journ. », Vol. XXXIII (1930), pp. 150-152.

([3]) A. MAMBRIANI, *Sull'Algebra delle successioni*: Memoria 1.ª (« Ann. di Matem. pura ed appl. », s. IV, t. VIII (1930), pp. 103-139) e Memoria 2.ª (in corso di stampa negli stessi « Annali »).

dove è, usando le notazioni di divisione binomiale e di potenza binomiale [4],

$$(2)\qquad c_n = \left[\frac{2\varepsilon_n}{1^n + (-1)^n}|n\right]^{p)n}, \quad \gamma_n = \left[\frac{1^n - (-1)^n}{1^n + (-1)^n}|n\right]^{p)n}.$$

Da queste espressioni di c_n e γ_n risulta intanto [5], per $n = 0, 1, 2, \ldots$,

$$(3)\qquad c_{2n+1} = 0; \quad \gamma_0 = \gamma_1 = \ldots = \gamma_{p-1} = 0, \quad \gamma_{2n+p+1} = 0.$$

2. Calcolo effettivo di c_n. — I c_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ sono i così detti *numeri di Eulero d'ordine superiore* (precisamente, d'ordine p) indicati solitamente con $E_n^{(p)}$, e la prima delle (2) fornisce già un'espressione esplicita di tali numeri. Da questa espressione possiamo però dedurre, *in modo del tutto elementare*, diverse altre espressioni non contenenti più l'indicazione di operazioni binomiali: per seguire una via che conduca anche alla espressione indicata dallo SCHWATT, notiamo che dalla uguaglianza manifesta [6]

$$\frac{2\varepsilon_n}{1^n + (-1)^n}|n = \frac{2\varepsilon_n}{2^n + \varepsilon_n}|n \overset{n}{\cdot} 1^n$$

segue [7]

$$(4)\qquad c_n = \left(\frac{2\varepsilon_n}{2^n + \varepsilon_n}|n\right)^{p)n} \overset{n}{\cdot} p^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} p^{n-m} \left(\frac{2\varepsilon_m}{2^m + \varepsilon_m}|m\right)^{p)m}.$$

Ma è [8]

$$\left(\frac{2\varepsilon_m}{2^m + \varepsilon_m}|m\right)^{p)m} = \left(\frac{2^m + \varepsilon_m}{2}\right)^{-p)m} = \sum_{r=0}^{m} \binom{p+r-1}{r} \left(\varepsilon_m - \frac{2^m + \varepsilon_m}{2}\right)^{r)m}$$

e qui avendosi [9]

$$\left(\varepsilon_m - \frac{2^m + \varepsilon_m}{2}\right)^{r)m} = 2^{-r}(\varepsilon_m - 2^m)^{r)m} = 2^{-r}\sum_{s=0}^{r}(-1)^s \binom{r}{s}(2s)^m$$

è anche

$$(5)\qquad \left(\frac{2\varepsilon_m}{2^m + \varepsilon_m}|m\right)^{p)m} = \sum_{r=0}^{m} \binom{p+r-1}{r} 2^{-r} \sum_{s=0}^{r}(-1)^s \binom{r}{s}(2s)^m,$$

dove il secondo membro, come risulta subito [10] dall'esame del primo membro, è un'espressione esplicita dei numeri, che il

[4] Loc. cit. in [3]: Memoria 1.ª, n.i 4, 5, 23; Memoria 2.ª, n.° 62.
[5] Ibid., Memoria 1.ª, n.i 28, 10, 11.
[6] Ibid., Memoria 1.ª, n.° 25, β).
[7] Ibid., Memoria 1.ª, n.° 9, γ).
[8] Ibid., Memoria 2.ª, n.° 58, (51).
[9] Ibid., Memoria 2.ª, n.° 41, (3).
[10] Ibid., Memoria 2.ª, n.° 62.

NÖRLUND indica ([11]) con $C_m^{(p)}$, aventi per *funzione generatrice* $[2:(e^{2x}+1)]^p$. Sostituendo (5) in (4) si ottiene, per c_n, una prima espressione del tipo cercato:

$$c_n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} p^{n-m} \sum_{r=0}^{m} \binom{p+r-1}{r} 2^{-r} \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} (2s)^m. \tag{6}$$

Se qui notiamo poi che è

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} (2s)^m = (-1)^r 2^m \Delta^r 0^m = 0 \quad \text{per} \quad r > m,$$

si può, in (6), assumere come estremo superiore della sommatoria intermedia il numero n in luogo di m e fare sparire il primo segno sommatorio:

$$c_n = \sum_{r=0}^{n} \binom{p+r-1}{r} 2^{-r} \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} (p+2s)^n, \tag{6'}$$

e questa è l'espressione data dallo SCHWATT.

Se invece si procede direttamente sull'espressione (2) di c_n in modo analogo a quanto si è fatto per ottenere la (5), si ha:

$$c_n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p+r-1}{r} \binom{p+n}{p+r} 2^{-r} \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} (r-2s)^n. \tag{6''}$$

3. Calcolo effettivo di γ_n. — La seconda delle (2) fornisce già una espressione esplicita di γ_n: da questa, e sempre *in modo completamente elementare*, possiamo dedurne altre non contenenti più l'indicazione di operazioni binomiali. All'uopo osserviamo che, per essere ([12])

$$\frac{1^n-(-1)^n}{1^n+(-1)^n}\Big|n = \frac{2^n-\varepsilon_n}{2^n+\varepsilon_n}\Big|n = \frac{2^n+\varepsilon_n-2\varepsilon_n}{2^n+\varepsilon_n}\Big|n = \varepsilon_n - \frac{2\varepsilon_n}{2^n+\varepsilon_n}\Big|n,$$

segue ([13])

$$\gamma_n = \left(\varepsilon_n - \frac{2\varepsilon_n}{2^n+\varepsilon_n}\Big|n\right)^{p)^n} = \sum_{m=0}^{p} (-1)^m \binom{p}{m} \left(\frac{2\varepsilon_n}{2^n+\varepsilon_n}\Big|n\right)^{m)^n},$$

da cui viene, in virtù di (5), una prima espressione del tipo cercato:

$$\gamma_n = \sum_{m=0}^{p} (-1)^m \binom{p}{m} \sum_{r=0}^{m} \binom{m+r-1}{r} 2^{-r} \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} (2s)^n. \tag{7}$$

([11]) N. E. NÖRLUND, *Vorlesungen über Differenzenrechnung*. Berlin, 1924. Cfr. pag. 145.

([12]) Loc. cit. in ([3]): Memoria 1.ª, n.i 25, 26.

([13]) Ibid., Memoria 2.ª, n.º 41, (3).

Se qui notiamo che è ([14])

$$\sum_{m=0}^{p}(-1)^m\binom{p}{m}\binom{m+r-1}{r}=(-1)^p\binom{r-1}{p-1},$$

si ha, più semplicemente,

$$\gamma_n=(-1)^p\sum_{r=0}^{n}\binom{r-1}{p-1}2^{-r}\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}(2s)^n \tag{7'}$$

che è l'espressione indicata dallo SCHWATT.

4. Per avere gli sviluppi di $\sec^p x$ e di $\mathrm{tg}^p x$ in serie di potenze di x, basta notare che da (1) segue, in virtù delle (3),

$$\sec^p x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n c_{2n}\frac{x^n}{n!},\quad \mathrm{tg}^p x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\gamma_{2n+p}\frac{x^{2n+p}}{(2n+p)!},\quad |x|<\frac{\pi}{2},$$

e sostituire qui a c_{2n} una delle espressioni date da (6) o (6′) o (6″) ed a γ_{2n+p} l'espressione data da (7) o da (7′).

([14]) Come ha osservato lo SCHWATT e come, d'altra parte, si può far discendere facilmente dalla formula $\binom{r}{p}\overset{p}{\cdot}1^p=\binom{r+p}{p}$. [Loc. cit. in ([3]): Memoria 1.ª, pag. 119, (35)].