Bollettino Unione Matematica Italiana

Pietro Burgatti

Intorno a una formula generale di trasformazione di un integrale di spazio in uno di superficie e alle sue varie deduzioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.1, p. 1–5.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_1_1_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1931.

PICCOLE NOTE

Intorno a una formula generale di trasformazione di un integrale di spazio in uno di superficie e alle sue varie deduzioni.

Nota di PIETRO BURGATTI a (Bologna).

Sunto. - *Si deduce in modo molto semplice una formula generale di trasformazione di un integrale di spazio in uno di superficie, che contiene alcune utili formule particolari note e nuove, e si presta a coordinare tra loro risultati classici.*

Abbiansi due vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ funzioni monodrome finite e continue insieme alle loro derivate dei punti di un campo S, limitato dalla superficie (σ). Consideriamo l'omografia vettoriale

$$\alpha = H(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + H(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$$

che è una dilatazione. Per il noto teorema del gradiente

$$\int_S \operatorname{grad} \alpha dS = -\int_\sigma \alpha \boldsymbol{n} d\sigma,$$

indicando con $\boldsymbol{n}$ la normale unitaria interna, si ha nel caso presente

$$\int_S \operatorname{grad} \alpha dS = -\int_\sigma [(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n})\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n})\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})\boldsymbol{n}]d\sigma$$

$$= -\int_\sigma [(\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n})\boldsymbol{u}]d\sigma.$$

D'altra parte risulta [1]

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \alpha &= \operatorname{grad} H(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \operatorname{grad} H(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) - \operatorname{grad} (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \\ &= \boldsymbol{v} \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\boldsymbol{v} - K\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\boldsymbol{v} - K\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\boldsymbol{u} \\ &= \boldsymbol{v} \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} + \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{u} \end{aligned}$$

(1) *Analisi vettoriale generale.* Vol. I, BURALI-FORTI e MARCOLONGO, pag. 190.

perchè

$$\frac{du}{dP} - \mathrm{K}\frac{du}{dP} = \mathrm{rot}\, u \wedge, \quad \frac{dv}{dP} - \mathrm{K}\frac{dv}{dP} = \mathrm{rot}\, v \wedge;$$

perciò si ottiene la formula

$$\text{(I)} \qquad \int_S (v \operatorname{div} u + u \operatorname{div} v + \mathrm{rot}\, u \wedge v + \mathrm{rot}\, v \wedge u) dS =$$
$$= -\int_\sigma [(u \wedge v) \wedge u + (v \times n) u] d\sigma.$$

Questa *formula generale* permette, mediante specializzazione dei vettori u e v, di ottenere parecchie altre formule utili nelle applicazioni.

1. Si ponga $u = v$; la (I) diventa

$$\text{(II)} \qquad 2\int_S (u \operatorname{div} u + \mathrm{rot}\, u \wedge u) dS = -\int_\sigma [2(u \times n)u - u^2 n] d\sigma,$$

valida per qualunque u soddisfacente alle condizioni di regolarità sopradette. In particolare se è rot $u = 0$, ossia $u = \mathrm{grad}\, \varphi$, si ha

$$\text{(III)} \qquad \int_S u \operatorname{div} u dS = -\int_\sigma [(u \times n)u - \frac{u^2}{2} n] d\sigma;$$

formula già usata dal LEVI-CIVITA nella sua Nota sull'efflusso dei liquidi da un foro.

2. Se si suppone div $u = 0$, risulta

$$\text{(IV)} \qquad \int_S \mathrm{rot}\, u \wedge u dS = -\int_\sigma [(u \times n)u - \frac{u^2}{2} n] d\sigma;$$

altra formula utile in aerodinamica, come ha mostrato il prof. TEOFILATO (1).

3. Supponendo div $u = 0$, rot $u = 0$, e perciò $u = \mathrm{grad}\, \varphi$ con φ armonica, il 1° membro della (II) si annulla e si ha la notevole identità

$$\int_\sigma (\mathrm{grad}\, \varphi \times n)\, \mathrm{grad}\, \varphi d\sigma = \frac{1}{2}\int_\sigma (\mathrm{grad}\, \varphi)^2 n d\sigma,$$

valida dunque per le funzioni armoniche regolari.

(1) *Le pressioni aerodinamiche ecc.* « Nuovi Lincei », 1927.

4. Nella (I) sia $\operatorname{div} v = 0$, $\operatorname{rot} v = 0$, cioè sia $v = \operatorname{grad} \varphi$ con φ armonica, e poniamo $u = P - O$, essendo O punto fisso. Poichè $\operatorname{rot}(P - O) = 0$, $\operatorname{div}(P - O) = 3$, la formula diventa

$$3\int_S \operatorname{grad} \varphi dS = -\int_\sigma \{ n \times (P - O) \cdot \operatorname{grad} \varphi - \operatorname{grad} \varphi \times (P - O) \cdot n \} d\sigma$$
$$-\int_\sigma (\operatorname{grad} \varphi \times n)(P - O) d\sigma.$$

Sia ora (σ) una sfera di raggio R col centro in O.
Si ha $P - O = -Rn$ epperò i due termini

$$\operatorname{grad} \varphi \times (P - O) \cdot n \quad \text{e} \quad (\operatorname{grad} \varphi \times n)(P - O)$$

diventano uguali e si elidono; perciò resta

$$\text{(V)} \qquad \int_S \operatorname{grad} \varphi dS = \frac{R}{3}\int_\sigma \operatorname{grad} \varphi d\sigma,$$

formula notevole, *valida per ogni funzione armonica regolare in un campo sferico.*

Si può scrivere

$$4\pi R^2 \int_S \operatorname{grad} \varphi dS = \frac{4}{3}\pi R^3 \int_\sigma \operatorname{grad} \varphi d\sigma$$

ossia *gl'integrali estesi al volume e alla superficie di una sfera del gradiente di una funzione armonica regolare stanno fra loro come il volume e la superficie*, od anche si potrebbe dire, con una certa estensione del concetto di media, che *la media dei valori di* grad φ *entro la sfera è uguale a quella dei suoi valori sulla superficie.*

5. Finora si è supposto la regolarità di $\operatorname{div} u$ e v.

Poniamo invece che sia $v = \operatorname{grad} \frac{1}{r}$, ove $r = \operatorname{mod}(M - P)$; in P diventa infinito come $\frac{1}{r^2}$. Bisognerà allora escludere il punto P con una sferetta (ω) di raggio ε e applicare la (I) allo spazio (S_1) compreso fra (σ) e (ω), poi passare al limite per ε che tende a zero. Allora si vede subito che gli integrali

$$\int_\omega (u \times n_0) \operatorname{grad} \frac{1}{r} d\omega \quad \text{e} \quad \int_\omega \left(u \times \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right) n_0 d\omega$$

diventano uguali sulla sferetta e si elidono.

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_\omega\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\times n_0\right)u\,d\omega = 4\pi u(P)$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\frac{1}{r}=0, \quad \operatorname{rot}\operatorname{grad}\frac{1}{r}=0\,;$$

perciò risulta infine

$$\text{(VI)} \quad 4\pi u(P)=\int_S\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\cdot\operatorname{div}u+\operatorname{rot}u\wedge\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)dS$$
$$+\int_\sigma\left[(u\times n)\operatorname{grad}\frac{1}{r}+\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\times n\right)u-\left(u\times\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)n\right]d\sigma.$$

Questa formula notevole non è nuova. In qualche trattato francese sulla teoria matematica della elettricità si trova citata (sotto altra forma del resto) sotto il nome di *teorema di Vaschy*. Essa permetterebbe di calcolare il valore di u in ogni punto di (S) quando fossero noti i valori della divergenza e del rotazionale in (S) e i valori di u in superficie. Ma quest'ultimo dato è soverchio; giacchè cotesto vettore è univocamente determinato dai soli valori di $u\times n$ in superficie, dati *div* u e *rot* u in (S). Ma con la solita funzione di Green si possono far sparire dalla (VI) i termini in u e lasciar sussistere il solo termine in $u\times n$.

Notevole è il fatto che la (VI) può assumere la forma

$$4\pi u(P)=\operatorname{grad}_P\varphi+\operatorname{rot}_P w,$$

ove

$$\text{(VII)} \quad \varphi=-\int_S\frac{\operatorname{div}u}{r}\,dS-\int_\sigma\frac{u\times n\,d\sigma}{r}$$
$$w=\int_S\frac{\operatorname{rot}u}{r}\,dS+\int_\sigma\frac{n\wedge u}{r}\,d\sigma.$$

Basta infatti osservare che si ha

$$\int_S\operatorname{grad}_M\frac{1}{r}\cdot\operatorname{div}_M u\,dS=-\int_S\operatorname{grad}_P\frac{1}{r}\cdot\operatorname{div}_M u\,dS=-\operatorname{grad}_P\int_S\frac{\operatorname{div}_M u}{r}\,dS\,;$$

$$\int_\sigma(u\times n)\operatorname{grad}_M\frac{1}{r}\,d\sigma=-\int_\sigma(u\times n)\operatorname{grad}_P\frac{1}{r}\,d\sigma=-\operatorname{grad}_P\int_\sigma\frac{u\times n}{r}\,d\sigma\,;$$

ed analoghe. Cotesti integrali sono potenziali scalari e vettori di volume e di semplice strato.

poi si considera il vettore (potenziale–vettore)

$$v(P) = \int_S \frac{u(M)}{r}\, dS,$$

facilmente si trova

$$\operatorname{div} u = \int_\sigma \frac{u \times n}{r}\, d\sigma + \int_S \frac{\operatorname{div}_M u}{r}\, dS = -\varphi,$$

$$\operatorname{rot} v = \int_\sigma \frac{n \wedge u}{r}\, d\sigma + \int_S \frac{\operatorname{rot}_M n}{r}\, dS = w\,;$$

epperò risulta

$$4\pi u(P) = -\operatorname{grad}\operatorname{div} v + \operatorname{rot}\operatorname{rot} v,$$

ossia

$$-4\pi u(P) = \Delta' v.$$

Questa è la ben nota *formula di Poisson*, ed è così mostrato che è equivalente alla (VI). Le cose dette fanno comprendere l'utilità della formula di Vaschy nei problemi dell'elettromagnetismo.