Bruno Finzi

Tensori elastici per deformazioni finite

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.2, p. 57–61.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_2_57_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1931.

PICCOLE NOTE

Tensori elastici per deformazioni finite.

Nota di Bruno Finzi (a Milano).

Sunto. - *Premesse alcune nozioni sui tensori funzioni degli elementi di un tensore e sui tensori funzioni di un tensore, si applicano le considerazioni svolte ai solidi elastici soggetti a deformazioni finite. Si ha così occasione di introdurre dei tensori di vario ordine che caratterizzano la natura elastica del corpo a cui si riferiscono.*

1. Tensore funzione degli elementi di un altro tensore. — Sia $\underset{k}{X}$ un sistema multiplo d'ordine k, di elementi $X_{i_1\dots i_k}$ $(i=1,\dots, m)$. Sia $\underset{h}{Y}$ un sistema d'ordine h, di elementi $Y_{p_1\dots p_h}$ $(p=1,\dots, m)$. Se gli elementi di Y sono funzioni degli elementi di X, scriveremo $Y=Y(X_{i_1\dots i_k})$. Se tali funzioni, in un dato campo di variabilità, sono sviluppabili in serie di Mac-Laurin, scriveremo, sottointendendo le sommatorie da 1 a m rispetto agli indici comuni ai varî fattori:

$$(1)\qquad Y_{p_1\dots p_h}=\sum_{0}^{\infty}{}_n\, \gamma^{(n)}_{p_1\dots p_h i_1'\dots i_k'\dots i_1^{(n)}\dots i_k^{(n)}}\, X_{i_1'\dots i_k'}\dots X_{i_1^{(n)}\dots i_k^{(n)}} \quad [1].$$

Oppure, con scrittura più concisa, indicando con $\underset{r}{\cdot}$ il prodotto di sistemi a saturazione r-pla (prodotto d'ordine r [2]), e con $\underset{nk}{X^n}$ il prodotto d'ordine zero di n fattori eguali ad $\underset{k}{X}$,

$$(1')\qquad \underset{h}{Y}=\sum_{0}^{\infty}{}_n\, \underset{h+nk}{\gamma^{(n)}}\underset{nk}{\cdot}\underset{nk}{X^n}.$$

[1] Ricordando il significato dei coefficienti $\gamma^{(n)}\dots$ si constata che non tutti sono distinti. Il numero dei coefficienti distinti è, in generale, $m^h\binom{m^k+n-1}{n}$.

[2] Cfr. B. Finzi, *Calcolo dei sistemi multipli.* « Rend. del R. Ist. Lombardo », t. LXIV, 1931.

Supponiamo ora che nella metrica

(2) $$ds^2 = a_{ij}\,dx^i\,dx^j, \quad (a_{ij} = a_{ji}\,;\ i,\ j = 1,\dots,\ m)$$

il sistema X rappresenti in una data forma, ad esempio in forma covariante, un tensore. Anche Y, nella metrica (2), rappresenti un tensore, ad esempio in forma covariante. Manifestamente tutti i coefficienti $\underset{h+nk}{\gamma^{(n)}}$ dello sviluppo (1') (o (1)) rappresenteranno tensori nella metrica (2). Nel caso citato ad esempio questi tensori avranno carattere covariante rispetto ad h indici e controvariante rispetto ad nk indici.

2. **Tensore funzione di un altro tensore.** — Se X è un sistema d'ordine pari, eguale a $2r$, i sistemi $\underset{2r}{X^n}$, prodotti d'ordine r di n fattori eguali ad X, appartengono tutti alla stessa algebra, e $\underset{2r}{X^o} = \underset{2r}{\delta}$ definisce l'unità nel prodotto d'ordine r. Si consideri allora il sistema

(3) $$\underset{h}{Y} = \sum_0^\infty{}_n\ \underset{h_n}{c^{(n)}} \underset{r_n}{\cdot} \underset{2r}{X^n} \quad (h_n = h - 2r + 2r_n,\ 2r - h \leq r_n \leq 2r).$$

Per il sistema Y può definirsi una derivata come limite di rapporto incrementale, e così espressa: $Y' = \sum_1^\infty n c^{(n)} \underset{r_n}{\cdot} X^{n-1}$ (1). Diremo che il sistema Y, definito dalla (3), è funzione del sistema X, e scriveremo $Y = Y(X)$. In particolare, se $h_n = 0$ (e quindi $r_n = 0$, $h = 2r$) la (3) definisce le funzioni che per $r = 1$ Giorgi chiama funzioni aritmetiche di matrici (2).

Se nella generica (3) X e Y rappresentano tensori, anche i sistemi $c^{(n)}$ rappresentano tensori. Così, ad esempio, se $r_n \leq r$ e X ha r indici di covarianza e r di controvarianza, se Y ha r indici di controvarianza e $h - r$ di covarianza, $c^{(n)}$ avrà r_n indici di controvarianza e $h_n - r_n$ di covarianza; se $r_n \geq r$ e X ha ancora r indici di covarianza e r di controvarianza, se Y ha $h_n - r_n$ indici di covarianza e $2r - r_n$ indici di controvarianza, $c^{(n)}$ avrà r indici di controvarianza e $h_n - r$ di covarianza.

Vogliamo ora stabilire quando una generica funzione (1') $Y(X_{i_1\dots i_r\, j_1\dots j_r})$ può porsi sotto la forma (3) $Y = Y(X)$ (3).

(1) B. Finzi, loco citato, n.° 15 e n.° 19.

(2) *Sulle funzioni delle matrici.* « Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. VII, 1928, p. 178.

(3) Si osservi che, mentre una funzione $Y(X)$ è una funzione $Y(X_{i_1\dots i_r\, j_1\dots j_r})$, non è vero sempre il viceversa. Avviene dunque per

Consideriamo il tensore rappresentato in forma mista dal sistema $\underset{2\rho}{\delta}$ che definisce l'unità nel prodotto d'ordine ρ; cioè il prodotto d'ordine zero di ρ fattori eguali al sistema che rappresenta in forma mista il tensore fondamentale a della metrica (2). Sarà

$$\delta^{i_1 \dots i_\rho}_{j_1 \dots j_\rho} = \begin{cases} 1, \text{ se } i_1 = j_1, \dots\, i_\rho = j_\rho \\ 0, \text{ in caso contrario.} \end{cases} \tag{4}$$

Si vede allora che perchè la (1) assuma la forma (3) deve essere, per $r_n \leq r$,

$$\gamma^{(n)}{}^{q_1 \dots q_r \; i_1{}' \dots i_r{}^{(n)}}_{p_1 \dots p_{h-r} \; j_1{}' \dots j_r{}^{(n)}} = \tag{5}$$

$$= c^{(n)}{}^{i'_1 \dots i'_{r_n}}_{p_1 \dots p_{h_n - r_n}} \delta^{i'_{r_n+1} \dots i'_r}_{p_{h_n - r_n + 1} \dots p_{h-r}} \delta^{i''_1 \dots i''_r \dots i_1{}^{(n)} \dots i_r{}^{(n)}}_{j'_1 \dots j'_r \dots j_1{}^{(n-1)} \dots j_r{}^{(n-1)}} \delta^{q_1 \dots q_r}_{j_1{}^{(n)} \dots j_r{}^{(n)}},$$

e per $r_n \geq r$,

$$\gamma^{(n)}{}^{q_1 \dots q_{2r - r_n} \; i'_1 \dots i_r{}^{(n)}}_{p_1 \dots p_{h_n - r_n} \; j'_1 \dots j_r{}^{(n)}} = \tag{5'}$$

$$= c^{(n)}{}^{i'_1 \dots i'_r \qquad\qquad (n)}_{p_1 \dots p_{h_n - r_n} j_1{}^{(n)} \dots j_{r_n - r}} \delta^{i''_1 \dots i''_r \dots i_1{}^{(n)} \dots i_r{}^{(n)}}_{j'_1 \dots j'_r \dots j_1{}^{(n-1)} \dots j_r{}^{(n-1)}} \delta^{(n)}{}^{q_1 \dots q_{2r - r_n}}_{j_{r_n - r + 1} \dots j_r{}^{(n)}}.$$

3. Applicazione ai solidi elastici. — Applichiamo le considerazioni precedenti ai solidi elastici soggetti a deformazioni finite.

Consideriamo un sistema continuo. La deformazione del sistema sarà conosciuta allorchè è dato il tensore doppio simmetrico ξ, così definito in funzione degli spostamenti individuati dal vettore v [1]:

$$2\xi_{ik} = v_{i|k} + v_{k|i} + v_{j|i} v^j{}_{|k}. \tag{6}$$

Supponiamo ora che il sistema continuo considerato sia elastico e sia Φ il tensore doppio simmetrico degli sforzi che si esercitano in seno ad esso. Se la deformazione è infinitesima di primo ordine, e quindi nelle (6) si trascurano gli ultimi addendi dei secondi membri, le componenti del tensore degli sforzi sono, in virtù della legge di Hooke (ut tensio sic vis), funzioni lineari ed omogenee delle componenti del tensore di deformazione. Se la deformazione è *finita*, il tensore degli sforzi in un corpo elastico avrà componenti funzioni delle componenti del tensore di defor-

le funzioni che consideriamo qualcosa di analogo a quel che avviene per le funzioni di variabile complessa: se $\varphi + i\psi$ è funzione di $x + iy$, φ e ψ sono funzioni di x e y; però una generica coppia φ e ψ di funzioni di x e y non sempre caratterizza un numero complesso $\varphi + i\psi$ funzione analitica del numero complesso $x + iy$.

[1] Cfr. ad es. P. Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, III, Paris 1921, pp. 241-245.

mazione. E però Φ si annulla insieme a ξ. Rappresentando ξ e Φ in forma mista, e applicando lo sviluppo (1) si avrà:

$$\Phi_p^q = \sum_1^\infty {}_n \gamma^{(n)}{}^{qi' \ldots i^{(n)}}_{pj' \ldots j^{(n)}} \xi_{i'}^{j'} \ldots \xi_{i^{(n)}}^{j^{(n)}}. \tag{7}$$

I tensori rappresentati in forma mista dai sistemi $\underset{2(n+1)}{\gamma^{(n)}}$ sono indipendenti dal tensore di deformazione e dipendono soltanto dalla natura elastica del sistema. Per piccole deformazioni la somma che compare nel secondo membro delle (7) si riduce al solo primo addendo, e quindi $\underset{4}{\gamma^{(1)}}$ rappresenta ciò che CISOTTI denominò tensore elastico (¹), e che noi diremo *primo* tensore elastico. Diremo allora $\underset{6}{\gamma^{(2)}}$ *secondo* tensore elastico,..., $\underset{2(n+1)}{\gamma^{(n)}}$ *n-^mo^ tensore elastico* (²).

4. **Isotropia.** — Supponiamo, in particolare, che il corpo sia isotropo: le sue proprietà elastiche siano dunque indipendenti da ogni direzione (³). In questo caso i tensori elastici debbono essere isotropi (⁴). Cioè $\gamma^{(1)}$ è un tensore quadruplo le cui componenti così si esprimono in forma, ad esempio, covariante (⁵):

$$\gamma^{(1)}_{ikjh} = Aa_{ik}a_{jh} + Ba_{ij}a_{kh} + Ca_{ih}a_{kj}. \tag{8}$$

Se si tien conto della simmetria di Φ e di ξ si vede che i tre scalari A, B, C si riducono essenzialmente a due soli. Per deformazioni infinitesime di sistemi omogenei questi due sono le costanti caratteristiche dei mezzi elastici isotropi omogenei. $\gamma^{(2)}$ è un ten-

(¹) *Lezioni di Calcolo tensoriale.* Milano, 1928, n.° 28.

(²) Poichè Φ e ξ sono tensori simmetrici, manifestamente i tensori $\gamma^{(n)}$ non mutano scambiando p con q, e possono ridursi essenzialmente a tensori che non mutano scambiando un qualunque i con il corrispondente j. Anche lo scambio di due coppie di indici ij non muta i tensori $\gamma^{(n)}$ (cfr. nota (¹) di n.° 1). Il numero di componenti essenziali distinte è dunque, in generale, (per $m = 3$) eguale a $6\binom{5+n}{n}$. Così, per $n = 1$, tale numero è 36, per $n = 2$, è 126, per $n = 3$, è 336, ecc..

(³) Cfr. E. ALMANSI, *Sulle deformazioni finite dei solidi elastici isotropi.* « Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XX, 1° sem. 1911, p. 705, 2° sem. 1911, p. 89 e p. 289.

(⁴) U. CISOTTI, *Tensori isotropi.* « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei » vol. XI, 1930, p. 727.

(⁵) U. CISOTTI, *Tensori quadrupli isotropi.* « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XI, 1930, p. 1055.

sore sestuplo le cui componenti, ad esempio covarianti, sono somma di 15 addendi analoghi all'addendo che scriviamo:

$$(8') \qquad \gamma^{(2)}_{ikjhrs} = A a_{ik} a_{jh} a_{rs} + \dots \text{ [1]}.$$

I 15 scalari che compaiono nella (8'), tenuto conto della simmetria di Φ e di ξ, si riducono essenzialmente a sei soli, come facilmente si può constatare [2]. In generale $\gamma^{(n)}$ è somma di $1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)$ addendi, ognuno dei quali è il prodotto d'ordine zero di n fattori a [3]. Il numero di scalari che così compaiono per individuare $\gamma^{(n)}$ risulta essenzialmente ridotto di numero, se si tien conto della simmetria di Φ e di ξ.

Si può rilevare che quando la (7) può porsi sotto la forma (3), se $c^{(n)}$ è isotropo, poichè δ è isotropo [4], lo è, in virtù delle (5), anche $\gamma^{(n)}$, e viceversa.

Questo fatto è vero per ogni funzione $Y(X_{i_1 \dots i_r\, j_1 \dots j_r})$ che può porsi sotto la forma $Y(X)$, cioè, se i coefficienti $c^{(n)}$ di $Y(X)$ sono isotropi, lo sono anche i coefficienti $\gamma^{(n)}$ di $Y(X_{i_1 \dots i_r\, j_1 \dots j_r})$, e viceversa. Ciò avviene, ad esempio, per le funzioni aritmetiche, per cui $h_n = 0$.

(1) M. Pastori, *Espressione generale dei tensori isotropi.* « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XII, 1930, p. 499, cfr. form. (2) e prec..

(2) Risultano così soddisfatte le condizioni della nota (2) di n.° 3.

(3) M. Pastori, loco citato, p. 500.

(4) Si ricordi che $\underset{2\rho}{\delta}$ è il prodotto d'ordine zero di ρ fattori eguali ad a, e che il tensore a è isotropo (U. Cisotti, loco secondo citato).