Bollettino Unione Matematica Italiana

Ludovico Geymonat

Un'osservazione sul teorema di Pringsheim per la serie di Taylor

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.2, p. 61–63.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_2_61_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1931.

Un'osservazione sul teorema di Pringsheim per la serie di Taylor.

Nota di LUDOVICO GEYMONAT (a Torino).

Sunto. - *Perchè una funzione* f(x) *sia sviluppabile in serie di* MAC LAURIN *non è condizione sufficiente (mentre, come risulta dal teorema di* PRINGSHEIM, *è condizione necessaria) che il suo resto di* CAUCHY *tenda a zero per un valore di* θ, $(0 < \theta < 1)$, *determinato, scelto in modo affatto arbitrario.*

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione $f(x)$ sia sviluppabile in serie di MAC LAURIN è che tenda a zero il resto di CAUCHY:

$$R_n = \frac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} x^n f^n(\theta x)$$

ove, come è noto, compare una quantità θ non completamente conosciuta, ma di cui si sa solo che $0 < \theta < 1$. Inoltre, come è pure ben noto, PRINGSHEIM ha dimostrato che, se questo avviene, allora tale resto tende a zero (e anche in modo uniforme) per tutti i valori di θ compresi fra 0 e 1. Potrebbe sorgere il dubbio che, se tale resto tende a zero per un valore di θ determinato (ma scelto in modo affatto arbitrario), avvenisse ancora che la funzione sia sviluppabile in serie di MAC LAURIN.

A questo dubbio si risponde negativamente, come dimostra il seguente esempio.

Lo sviluppo di MAC LAURIN per $(1+x)^{\frac{3}{2}}$, cioè:

$$1+\binom{\frac{3}{2}}{1}x+\binom{\frac{3}{2}}{2}x^2+\ldots$$

non converge se x varia nell'intervallo da 1 a 2. Ciò malgrado il suo resto di CAUCHY, dove a θ non si dia il suo giusto valore, ma per es. il valore $\theta=\frac{1}{2}$, tende a zero col tendere di n ad ∞, per tutti gli x sodisfacenti alla disuguaglianza $1<x<2$.

Infatti si ha:

$$R_n=\frac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}x^n\,\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{3}{2}-n+1\right)\cdot(1+\theta x)^{\frac{3}{2}-n}$$

cioè:

$$R_n=(1+\theta x)^{\frac{3}{2}-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}x^n\;\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{3}{2}-n+1\right)}{(n-1)!}$$

espressione che si può scomporre in tre fattori, due dei quali, posto $\theta=\frac{1}{2}$, tendono a zero col tendere di n ad ∞, mentre l'altro resta finito:

1) $(1+\theta x)^{\frac{3}{2}-1}x=\left(1+\frac{1}{2}x\right)^{\frac{3}{2}-1}\cdot x$ resta finito perchè non dipende da n.

2) $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}x^{n-1}=\left(\frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}+1}\right)^{n-1}<1$ tende a zero col tendere di n ad ∞.

$$3)\quad \frac{\left|\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{3}{2}-n+1\right)\right|}{(n-1)!}=\frac{3}{2}\,\frac{\frac{3}{2}-1}{1}\,\frac{\left|\frac{3}{2}-2\right|}{2}\cdots$$

$$\cdots\frac{\left|\frac{3}{2}-(n-1)\right|}{n-1}<\frac{3}{2}\,\frac{\frac{3}{2}-1}{1}\,\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\cdots\frac{n-2}{n-1}$$

e quindi

$$\frac{\left|\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{3}{2}-n+1\right)\right|}{(n-1)!}<\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)}{n-1}$$

che, col tendere di n ad ∞, tende a zero.

Resta posta la questione: in qual modo si può scegliere la successione θ_1, $\theta_2, \ldots \theta_n, \ldots$ in guisa che, se

$$\frac{(1-\theta_n)^{n-1}}{(n-1)!}\,x^n f^n(\theta_n x)$$

tende, per $n=\infty$, a zero, allora tale espressione tenda a zero per tutti i valori di θ $(0<\theta<1)$ e quindi la $f(x)$ sia sviluppabile in serie di Mac Laurin?