Bollettino Unione Matematica Italiana

Paolo Cattaneo

Sui sistemi birombici

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.2, p. 63–67.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_2_63_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1931.

Sui sistemi birombici.

Nota di Paolo Cattaneo (a Padova).

Sunto. - *L'A. espone alcune proprietà dei sistemi di linee coordinate che dividono una superficie e la sua immagine sferica in rombi infinitesimi.*

1. Consideriamo sopra una superficie S, non sviluppabile, nè sferica, un sistema di linee coordinate tale che con esso tanto S quanto la sua immagine sferica restino divise in rombi infinitesimi. Usando le notazioni del Bianchi [1], ciò equivale a dire che sia

(1) $$E = G \quad \text{ed} \quad e = g.$$

Se $H = 0$, ossia se la S è minima, la seconda delle (1) è una conseguenza della prima. Se $H \neq 0$, dalle (1) si ha tosto

(1′) $$D = D''.$$

Diremo *sistemi birombici* quelli per i quali sono verificate tutte tre le relazioni (1) ed (1′).

[1] *Lezioni di Geometria differenziale*, 2ª ediz., vol. I, §§ 41, 54, 63 e 70.

2. Indicando con Ω l'angolo delle linee coordinate e con ω l'angolo corrispondente sull'immagine sferica, le tre forme fondamentali possono allora esser scritte così:

$$
(2)\qquad \begin{cases} ds^2 = \lambda(du^2 + 2\cdot\cos\Omega\cdot du\cdot dv + dv^2) \\ \lambda\cdot(\alpha\cdot du^2 + 2\beta\cdot du\cdot dv + \alpha\cdot dv^2) \\ ds'^2 = \lambda\gamma(du^2 + 2\cdot\cos\omega\cdot du\cdot dv + dv^2) \end{cases}
$$

e si ha

$$
(3)\qquad K = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\sin^2\Omega}, \quad H = \frac{2\beta\cdot\cos\Omega - 2\alpha}{\sin^2\Omega}.
$$

Di quì si trova ovviamente

$$
2\alpha = -H \pm \cos\Omega\cdot\sqrt{H^2 - 4K}, \quad 2\beta = -H\cdot\cos\Omega \pm \sqrt{H^2 - 4K}
$$

e quindi

$$
\begin{cases} 2\gamma = -2K - 2\alpha H = (H^2 - 2K) \mp \cos\Omega\cdot H\cdot\sqrt{H^2 - 4K} \\ 2\gamma\cdot\cos\omega = -2K\cdot\cos\Omega - 2\beta H = (H^2 - 2K)\cdot\cos\Omega \mp H\cdot\sqrt{H^2 - 4K} \end{cases}
$$

$$
(H^2 - 2K)\cdot(\cos\omega - \cos\Omega) = \mp H\cdot\sqrt{H^2 - 4K}\cdot(1 - \cos\omega\cdot\cos\Omega)
$$

$$
(4)\qquad \frac{\cos\Omega - \cos\omega}{1 - \cos\omega\cdot\cos\Omega} = \pm\frac{r_1{}^2 - r_2{}^2}{r_1{}^2 + r_2{}^2}.
$$

Si ha dunque $\Omega = \omega$ solo quando $r_1 = \pm r_2$.

3. Volendo avere tutti i sistemi birombici della superficie S, supponiamola riferita alle sue linee di curvatura, per le quali useremo l'indice 1.

Siano $u_1 = \varphi(u, v)$ e $v_1 = \psi(u, v)$ le formule di passaggio dalle linee di curvatura ad un sistema birombico qualsiasi.

Ovviamente si trova

$$
(5)\qquad \begin{cases} E = G = E_1\cdot\varphi_u'^2 + G_1\cdot\psi_u'^2 = E_1\cdot\varphi_v'^2 + G_1\cdot\psi_v'^2, \\ F = E_1\cdot\varphi_u'\cdot\varphi_v'' + G\cdot\psi_u'\cdot\psi_v', \\ D = D'' = D_1\cdot\varphi_u'^2 + D_1''\cdot\psi_u'^2 = D_1\cdot\varphi_v'^2 + D_1''\cdot\psi_v'^2, \\ D' = D_1\cdot\varphi_u'\cdot\varphi_v' + D_1''\cdot\psi_u'\cdot\psi_v', \end{cases}
$$

quindi

$$
\begin{cases} (E_1 + D_1)\cdot(\varphi_u'^2 - \varphi_v'^2) + (G_1 + D_1'')\cdot(\psi_u'^2 - \psi_v'^2) = 0, \\ (E_1 - D_1)\cdot(\varphi_u'^2 - \varphi_v'^2) + (G_1 - D_1'')\cdot(\psi_u'^2 - \psi_v'^2) = 0; \end{cases}
$$

donde, essendo

$$
(E_1 + D_1)\cdot(G_1 - D_1'') - (E_1 - D_1)\cdot(G_1 + D_1'') = 2D_1D_1''\cdot\left(\frac{G_1}{D_1''} - \frac{E_1}{D_1}\right) \neq 0,
$$

si ha

$$\varphi_u' = \pm \varphi_v' \quad \text{e} \quad \psi_u' = \pm \psi_v'.$$

Le φ e ψ sono dunque funzioni di $u+v$ o di $u-v$. Non potendo essere funzioni di una stessa variabile, una, ad es. φ, sarà funzione, affatto arbitraria, di $u+v$, l'altra, ψ, di $u-v$.

Le formule di trasformazione

$$u_1 = \varphi(u+v), \quad v_1 = \psi(u-v) \tag{6}$$

fra le linee di curvatura ed un sistema birombico qualsiasi equivalgono manifestamente alle

$$u = \Phi(u_1) + \Psi(v_1), \quad v = \Phi(u_1) - \Psi(v_1), \tag{6'}$$

dove anche Φ e Ψ sono simboli di funzioni arbitrarie.

4. Indicando con φ' e con ψ' la derivata di $\varphi(u+v)$ rispetto ad $u+v$ e quella di $\psi(u-v)$ rispetto ad $u-v$, dalle (5), (6) e (2) si ha

$$\left\{\begin{array}{ll} \lambda = E_1 \cdot \varphi'^2 + G_1 \cdot \psi'^2, & \lambda \cdot \cos\Omega = E_1 \cdot \varphi'^2 - G_1 \cdot \psi'^2 \\ \lambda\alpha = D_1 \cdot \varphi'^2 + D_1'' \cdot \psi'^2, & \lambda\beta = D_1 \cdot \varphi'^2 - D_1'' \cdot \psi'^2. \end{array}\right. \tag{7}$$

Dalle (6') si trova invece

$$\left\{\begin{array}{ll} E_1 = 4\lambda \cdot \cos^2\frac{\Omega}{2} \cdot \Phi'^2, & G_1 = 4\lambda \cdot \sin^2\frac{\Omega}{2} \cdot \Psi'^2 \\ D_1 = 2\lambda \cdot (\alpha+\beta) \cdot \Phi'^2, & D_1'' = 2\lambda \cdot (\alpha-\beta) \cdot \Psi'^2 \end{array}\right. \tag{7'}$$

Sulle linee $v = \text{cost.}$ si ha

$$\frac{dv_1}{du_1} = \frac{\Phi'}{\Psi'};$$

sulle linee $u = \text{cost.}$ si ha

$$\frac{dv_1}{du_1} = -\frac{\Phi'}{\Psi'}.$$

Lungo ogni linea del sistema birombico si ha dunque

$$\frac{dv_1}{du_1} \cdot \sqrt{\frac{G_1}{E_1}} = \pm \operatorname{tg}\frac{\Omega}{2};$$

ma è noto [1] che, indicando con θ l'angolo formato da una linea qualsiasi e dalla $v_1 = \text{cost.}$, si ha

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{dv_1}{du_1} \cdot \sqrt{\frac{G_1}{E_1}}.$$

[1] Loc. cit., § 42.

Le linee di ogni sistema birombico sono dunque bisecate dalle linee di curvatura, formando un angolo $\pm \frac{\Omega}{2}$ con le linee $v_1 = \text{cost.}$.

5. Se la superficie S ha un sistema birombico ortogonale, esso deve quindi coincidere con quello formato dalle bisettrici delle linee di curvatura.

È facile poi dimostrare che tale sistema è birombico solo quando S è isotermica (ossia ha isotermo (1) il sistema delle linee di curvatura). Anzi abbiamo che, se S non è isotermica, non vi sono sistemi birombici con apertura Ω costante; mentre invece, se S è isotermica, qualunque sia l'angolo costante χ, le linee inclinate di un angolo $\pm\chi$ sulle linee $v_1 = \text{cost.}$ formano un sistema birombico.

Infatti, se Ω è costante, si vede dalle (7′) che il rapporto $E_1 : G_1$ è eguale al rapporto fra una funzione della sola u_1 ed una della sola v_1, sicchè S è isotermica. Se, viceversa, S è isotermica (e ridotta ai parametri isometrici), si ha $E_1 = G_1 = \lambda_1$ e, qualunque sia la costante χ, posto $\varphi = u + v$ e $\psi = (u - v) \cdot \text{tg}\, \chi$, si deduce dalle (7)

$$\lambda = \lambda_1 \cdot (1 + \text{tg}^2 \chi) = \lambda_1 : \cos^2 \chi,$$
$$\lambda \cdot \cos \Omega = \lambda_1 \cdot (1 - \text{tg}^2 \chi) = (\lambda_1 \cdot \cos 2\chi) : \cos^2 \chi = \lambda \cdot \cos 2\chi,$$

quindi $\Omega = 2\chi$, c. d. d..

6. Perchè sia $D = D''$, è necessario e sufficiente (2) che x, y, z siano soluzioni di un'equazione del tipo

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} = a \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + b \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial v}. \tag{8}$$

Perchè il sistema sia birombico è necessario e sufficiente che la (8) sia soddisfatta anche da $\rho = x^2 + y^2 + z^2$.

Infatti, se x, y e z sono soluzioni della (8), si trova ovviamente

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2} = a \cdot \frac{\partial \rho}{\partial u} + b \cdot \frac{\partial \rho}{\partial v} + 2(E - G).$$

I sistemi con $D = D''$ sono conservati tali nelle trasformazioni proiettive.

(1) Loc. cit., §§ 44 e 46.
(2) Loc. cit., § 66.

Infatti, se x, y e z soddisfanno alla (8), si ponga $\xi = \alpha : \delta$, $\eta = \beta : \delta$ e $\zeta = \gamma : \delta$, con α, β, γ e δ espressioni lineari intere in x, y, z.

Ponendo $\vartheta = \delta \cdot \gamma$, la (8) si trasforma in un' equazione ad essa analoga nella φ, soddisfatta da $x : \delta$, $y : \delta$, $z : \delta$ e quindi anche da ξ, η, ζ: c. d. d..

Le trasformazioni proiettive non conservano, in generale, i sistemi birombici. Tale conservazione c'è però nell'inversione per raggi vettori reciproci. Vale una dimostrazione analoga a quella data dal Darboux per le linee di curvatura.

7. I coseni direttori X, Y, Z della normale ad una superficie sono sempre [1] soluzioni di una stessa equazione del tipo:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} = a \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + b \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial v} + c \cdot \vartheta. \tag{9}$$

Perchè sia $D = D''$ è necessario e sufficiente [2] che la (9) sia soddisfatta da tutte quattro le coordinate tangenziali X, Y, Z, W.

Essendo $c = g - e$, si ha il caso particolare del sistema birombico quando, nella (9), manca il termine in ϑ.

In modo analogo a quello usato dal Bianchi per i sistemi coniugati e per le assintotiche [3] si vede che nelle reciprocità dello spazio sono conservati anche i sistemi per i quali si ha $D = D''$.

I sistemi birombici non sono però, in generale, conservati. C'è la loro conservazione nelle polarità rispetto ad una sfera.

8. Terminiamo osservando che la torsione della geodetica uscente dal punto (u, v) della superficie nella direzione fissata dal rapporto $(dv : du)$ è data [4] dalla formula:

$$\frac{1}{T_g} = \frac{(\alpha \cdot \cos \Omega - \beta) \cdot (du^2 - dv^2)}{\sin \Omega \cdot (du^2 + 2 \cdot \cos \Omega \cdot du \cdot dv + dv^2)},$$

quando le linee coordinate formano un sistema birombico.

Di quì si ha tosto che le geodetiche tangenti alle linee di un tale sistema in un punto qualsiasi della superficie hanno sempre le torsioni eguali in valore assoluto e di segno contrario (come accade quando due geodetiche partono da un punto della superficie in direzioni fra loro ortogonali).

(1) Loc. cit., § 72.
(2) Loc. cit., § 81.
(3) Loc. cit., § 82.
(4) Loc. cit., § 92.