Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Maria Cibrario

Su una trasformazione per le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.2, p. 73–76.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_2_73_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1931.

Su una trasformazione per le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine.

Nota di MARIA CIBRARIO (a Torino).

Sunto. - *Si ricerca quali equazioni differenziali a derivate parziali del secondo ordine (che risultano del tipo:* $Az_{xx} + Bz_{xy} + Cz_{yy} = D$, *dove* A, B, C, D *sono funzioni di* x, y, z, z_x, z_y) *con una trasformazione del tipo:* $\xi = x$; $\eta = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \varphi(x, y, z, p, q)dx + \psi(x, y, z, p, q)dy$ *dove* z *è un integrale dell'equazione stessa e* $p = z_x$, $q = z_y$, *assumono la forma* $z_{\xi\xi} + z_{\eta\eta} = 0$, *oppure la* $z_{\xi\eta} = 0$. *Il secondo problema è risolto completamente, mentre per il primo si sono potute determinare effettivamente* φ *e* ψ *solo per alcuni tipi di equazioni.*

Il MÜNTZ in un suo lavoro [1] dà una trasformazione particolare per l'equazione differenziale a derivate parziali delle superfici minime:

$$(1 + z_y^2)z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + (1 + z_x^2)z_{yy} = 0.$$

Mediante il cambiamento di variabili:

$$\xi = x; \quad \eta = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{(1 + z_y^2)dy + z_x z_y dx}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}$$

[1] MÜNTZ, *Die Lösung des Plateauschen Problems über konvexen Bereichen*, « Math. Ann. », B. 94 (1925).

(dove z è un integrale dell'equazione stessa) egli la riduce alla:

$$z_{\xi\xi} + z_{\eta\eta} = 0,$$

e si serve di tale trasformazione nella risoluzione del problema di PLATEAU. Si può ricercare se vi sono altre equazioni differenziali a derivate parziali del secondo ordine, che mediante una trasformazione della forma

$$(1) \qquad \xi = x; \quad \eta = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \varphi(x, y, z, p, q)dx + \psi(x, y, z, p, q)dy \qquad (\psi \neq 0) \text{ (}^1\text{)}$$

(dove $z(x, y)$ è un integrale dell'equazione stessa e $p = z_x$, $q = z_y$) assumano la forma

$$(2) \qquad z_{\xi\xi} + z_{\eta\eta} = 0.$$

Perchè η sia funzione di x, y deve essere:

$$(3) \qquad \varphi_y = \psi_x$$

(dove le derivate sono fatte tenendo conto che z, p, q sono funzioni di x e y). Scrivendo per disteso la (3) e nella (2) ponendo per $z_{\xi\xi}$, $z_{\eta\eta}$ le loro espressioni in funzione di φ, ψ, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy} e delle derivate prime di φ e ψ, si trovano due equazioni differenziali del secondo ordine a derivate parziali, del tipo:

$$Az_{xx} + Bz_{xy} + Cz_{yy} = D,$$

dove A, B, C, D sono funzioni di x, y, z, p, q, e $D = 0$ se φ e ψ sono funzioni soltanto di p e q; imponendo che queste due equazioni si riducano ad una sola, si ottiene un sistema di equazioni differenziali a derivate parziali del primo ordine nelle φ, ψ, considerate come funzioni di x, y, z, p, q.

Nei casi che seguono sono imposte delle ulteriori condizioni, che semplificano tale sistema e permettono di determinare effettivamente le espressioni delle φ, ψ; si sono esclusi sistematicamente dallo studio i casi nei quali l'equazione, su cui si eseguisce la trasformazione (1), si riduce al primo ordine, i casi in cui A, B, C si

(1) Se $\psi = 0$, si ha: $\dfrac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = 0$; ψ non deve annullarsi per nessuna coppia di valori x, y, appartenente al campo su cui si eseguisce la trasformazione.

riducono a funzioni di x e y soltanto ([1]), e quelli in cui A, B, C, D non risultano reali.

Imponendo che la (3) sia soddisfatta identicamente si trova:

$$\varphi = hp + N_x, \quad \psi = hq + N_y$$

($h =$ cost. $\neq 0$, N funzione di x, y con derivate prime e seconde continue; $N_y \neq 0$); l'equazione:

$$\begin{aligned} N_y(hq + N_y)^2 z_{xx} - 2N_y(hp + N_x)(hq + N_y)z_{xy} + \\ + N_y[1 + (hp + N_x)^2]z_{yy} = q(hq + N_y)^2 N_{xx} - \\ - 2q(hp + N_x)(hq + N_y)N_{xy} + q[1 + (hp + N_x)^2]N_{yy} \end{aligned}$$

per $\xi = x$; $\eta = hz + N(x, y)$ assume la forma (2). Questo caso è l'unico in cui φ non contenga q e ψ non contenga p. In particolare per:

$$N(x, y) = mx + ny + k \quad (m, n, k \text{ costanti}; n \neq 0)$$

si ottiene la:

$$(hq + n)^2 z_{xx} - 2(hp + m)(hq + n)z_{xy} + [1 + (hp + m)^2]z_{yy} = 0.$$

Se si suppone $\varphi = 0$, si trova la:

$$qz_{xx} + (\pm c - p)z_{xy} = 0 \qquad (c = \text{cost.})$$

che nelle variabili:

$$\xi = x; \quad \eta = \int_{y_0}^{y} \frac{i, q}{\pm p - c}\, dy \quad \text{diviene} \quad z_{\xi\xi} + z_{\eta\eta} = 0 \ (^2).$$

Se si suppone che φ non contenga p e ψ non contenga q, si trova la:

$$Aq^2 z_{xx} - A(p + c)^2 z_{yy} = A_y q(p + c)^2 + cA_z q^2(p + c) - A_x q^2(p + c).$$

(A funzione arbitraria derivabile di x, y, z; $A \neq 0$, $c =$ cost.), che assume la forma (2) col cambiamento di variabili:

$$\xi = x; \quad \eta = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{dx}{Aq} + \frac{dy}{A(p + c)} \pm idx.$$

([1]) E quindi l'equazione, su cui si eseguisce la trasformazione (1) risulta lineare.

([2]) Posto $X = \xi + i\eta = x - \int_{y_0}^{y} \frac{q}{\pm p - c}\, dy$; $Y = \xi - i\eta = x + \int_{y_0}^{y} \frac{q}{\pm p - c}\, dy$, l'equazione diviene $z_{XY} = 0$.

Se si suppone che ψ non contenga p, si trova la:

$$A_q[qz_{xy} - (p+c)z_{yy}] = A_y(p+c) - A_x q + A_z cq$$

(A funzione arbitraria derivabile di x, y, z, q; $A \neq 0$: $A_q \neq 0$; $c = \text{cost.}$), che assume la forma (2) nelle variabili

$$\xi = x; \quad \eta = \int_{x_0, y_0}^{x, y} A[(p+c)dx + qdy] \pm idx.$$

Supponendo che φ non contenga q, si ottiene l'equazione:

$$A_p[qz_{xx} - (p+c)z_{xy}] = A_y(p+c) - A_x q + cA_z q$$

(A funzione arbitraria derivabile di x, y, z, p; $A \neq 0$: $A_p \neq 0$; $c = \text{cost.}$), che si trasforma nella (2) col cambiamento di variabili:

$$\xi = x; \quad \eta = \int_{x_0, y_0}^{x, y} A[(p+c)dx + qdy] \pm idx.$$

Se $\varphi = \pm i$, si ha la:

$$z_{xy}[p + k(y)] - z_{xx}[q + h(y)] = 0,$$

che si trasforma nella (2) (¹) col cambiamento di variabili:

$$\xi = x, \quad \eta = \pm i \int_{x_0, y_0}^{x, y} dx + 2\frac{q + h(y)}{p + k(y)} dy \ (^2).$$

(¹) Posto $X = \xi + i\eta$; $Y = \xi - i\eta$, l'equazione diviene $z_{XY} = 0$.

(²) Non si riesce a determinare facilmente φ e ψ all'infuori che in questi casi semplici. Invece si trova che tutte le equazioni del secondo ordine che con una trasformazione del tipo (1) divengono $z_{\xi\eta} = 0$ hanno la forma (quando φ e ψ non soddisfino identicamente la (3)):

$$q^2\psi_p z_{xx} + [\psi_q q^2 - \psi_p q(p+k) - \psi q]z_{xy} + [\psi(p+k) - \psi_q q(p+k)]z_{yy} =$$
$$= (\psi_y + \psi_z q)q(p+k) - (\psi_x + \psi_z p)q^2,$$

dove ψ è una funzione di x, y, z, p, q derivabile; k è funzione di x soltanto. (si ha: $\eta = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{\psi}{q}[\{p + k(x)\} dx + qdy]$), oppure si ottengono per

$$\psi = A(x, y, z)q, \quad \varphi = Aq\frac{A_x + A_z p}{A_y + A_z q} \quad \text{o per} \quad \psi = kq \qquad (k \text{ cost.})$$

e φ funzione arbitraria derivabile di x, y, z, p, q.

Se la (3) è soddisfatta identicamente si trova la:

$$N_y(hq + N_y)z_{xy} - N_x(hp + N_x)z_{yy} = q(hq + N_y)N_{xy} - q(hp + N_x)N_{yy},$$

che nelle variabili $\xi = x$, $\eta = hz(x, y) + N(x, y)$ diviene $z_{\xi\eta} = 0$.