Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Editta Pini

Sopra una classe di equazioni integrali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.2, p. 79–82.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_2_79_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1931.

Sopra una classe di equazioni integrali.

Nota di EDITTA PINI (a Bologna).

Sunto. - *L'A. considera una classe di equazioni integrali la cui soluzione è ricondotta a quella di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine.*

1. In due Note [1] il prof. G. USAI, prendendo lo spunto da un esempio di equazione integrale presa in esame da G. VIVANTI in un suo volume [2], considera delle equazioni integrali che sono casi particolari di un'equazione del tipo

$$f(x) = \varphi(x) - \int_0^x [a(x) - a(y)]\varphi(y)dy \tag{1}$$

dove $a(x)$ è una funzione derivabile nota.

Si può subito osservare che questa equazione integrale si riconduce ad una equazione differenziale del secondo ordine.

Infatti, dalla (1) si ha

$$f(x) = \varphi(x) - a(x)\psi(x) + \int_0^x a(y)\varphi(y)dy$$

con

$$\psi(x) = \int_0^x \varphi(y)dy. \tag{2}$$

Integrando per parti e considerando $a(x)$ come fattore finito, abbiamo

$$\int_0^x a(y)\varphi(y)dy = a(x)\psi(x) - \int_0^x \psi(y)a'(y)dy$$

e quindi la (1) si riduce alla

$$f(x) = \varphi(x) - z \tag{3}$$

[1] GIUSEPPE USAI, *Sopra un'equazione integrale.* « Giornale di Matematiche del Battaglini », vol. LVI (9° della 3ª serie); *Sulle soluzioni in termini finiti di equazioni integrali col nucleo* x — y. « Rend. Circolo Matematico di Palermo », tomo XLV, anno 1921.

[2] G. VIVANTI, *Elementi della teoria delle equazioni integrali lineari.*

dove si è posto

$$z = \int_0^x \psi(y) a'(y) dy.$$

Derivando la z si ottiene

$$z' = \psi(x) a'(x)$$

da cui

$$\psi(x) = \frac{z'}{a'}$$

e quindi, per la (2)

$$\varphi(x) = \left[\frac{z'}{a'}\right]'. \tag{4}$$

Sostituendo nella (3) abbiamo

$$f(x) = \left[\frac{z'}{a'}\right]' - z. \tag{5}$$

Si vede così che la risoluzione della (1) è ricondotta alla ricerca di una soluzione di questa equazione differenziale lineare del secondo ordine.

Notiamo che, data la natura della z, essa deve soddisfare alle relazioni

$$z(0) = 0, \quad z'(0) = 0.$$

Trovata una soluzione della (5) si ottiene subito la soluzione della (1) espressa dalla (4).

Osserviamo che la risoluzione della (5) può presentare qualche difficoltà, ma vi sono molti casi, fra i quali qualcuno considerato dall'Usai, che si risolvono immediatamente e quindi senza ricorrere ai metodi generali ed a complessi sviluppi in serie.

2. Esempio. — Supponiamo che sia:

$$a(x) = -x;$$

in tale ipotesi, la (1) e la (5) divengono, rispettivamente

$$f(x) = \varphi(x) - \int_0^x (y - x) \varphi(y) dy$$

$$-z'' - z = f(x).$$

Risolvendo questa equazione differenziale coi metodi del calcolo, si trova

$$z = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + \int_0^x f(y) \operatorname{sen}(y - x) dy.$$

Per le condizioni $z(0) = z'(0) = 0$, si ha:

$$c_1 = c_2 = 0$$

e quindi

$$z = \int_0^x f(y) \operatorname{sen}(y - x) dy.$$

Perciò applicando la (4) troviamo

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x f(y) \operatorname{sen}(y - x) dy.$$

Si è così trovata rapidamente la soluzione della data equazione integrale.

Se particolarmente si pone $f(x) = x$, cioè se si considera l'equazione integrale

$$x = \varphi(x) - \int_0^x (y - x)\varphi(y) dy$$

si ottiene la soluzione

$$\varphi(x) = \operatorname{sen} x.$$

In modo analogo, ponendo $a(x) = x$, $f(x) = x$, si ha

$$\varphi(x) = \operatorname{senh} x.$$

Se poi si pone $f(x) = 1$, $a(x) = -x$; $f(x) = 1$, $a(x) = x$, si ottengono rispettivamente le soluzioni

$$\varphi(x) = \cos x, \quad \varphi(x) = \cosh x.$$

3. Ma una vasta classe di equazioni (1) per cui il procedimento qui indicato è di facile applicazione si ha quando

$$a(x) = p(x) + \sqrt{p'(x)}$$

dove $p(x)$ è una funzione che ammette derivata.

In tale caso,

$$z_1 = \sqrt{p'(x)}\, e^{\int \sqrt{p'(x)}\, dx}$$

$$z_2 = z_1 \int \frac{a'}{z_1^{\,2}} dx$$

sono un sistema fondamentale di integrali dell'equazione differenziale omogenea corrispondente alla (5). Si è così in grado di trovare l'integrale generale della (5) e quindi quel suo particolare integrale che si annulla insieme alla propria derivata per $x = 0$.

Così, per esempio, se $p(x) = -\operatorname{cotg} x$, si ha

$$a(x) = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} \quad \text{e quindi} \quad a'(x) = \frac{1}{1 + \cos x}$$

$$z_1 = \frac{1}{\operatorname{sen} x} e^{\int \frac{1}{\operatorname{sen} x} dx} = \frac{1}{1 + \cos x}$$

$$z_2 = \frac{1}{1 + \cos x} \int \frac{a'}{z_1^2} dx = \frac{x + \operatorname{sen} x}{1 + \cos x}.$$

Applicando il metodo del LAGRANGE, si trova che la corrispondente soluzione della (5) tale che $z(0) = z'(0) = 0$ è data da

$$z = \frac{x + \operatorname{sen} x}{1 + \cos x} \int_0^x \frac{f(y)}{1 + \cos y} dy - \frac{1}{1 + \cos x} \int_0^x \frac{y + \operatorname{sen} y}{1 + \cos y} f(y) dy.$$

E per la (4)

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x \frac{x - y + \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{(1 + \cos x)(1 + \cos y)} f(y) dy.$$

Perciò l'equazione integrale

$$f(x) = \varphi(x) - \int_0^x \left[\frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{1 - \cos y}{\operatorname{sen} y} \right] \varphi(y) dy.$$

è risolta qualunque sia la funzione $f(x)$.