Recensioni

* G. Vivanti: Lezioni di Analisi matematica
* S. Banach, H. Steinhaus: Studia Mathematica, T. II
* Gino Loria: Il passato e il presente delle principali teorie geometriche. Storia e bibliografia
* T. A. Ramos: Leçons sur le calcul vectoriel
* Serenus D'Antinoe: Le livre de la section du cylindre et le livre de la section du cône
* Paul Bachmann: Grundlehren der neueren Zahlentheorie
* D. Leib: Applications du Calcul Différentiel et Intégral à 3500 questions de Géométrie, de Mécanique, de Physique, etc
* Gerhard Kowalewski: Integralgleichungen
* Rothe R.: Höhere Mathematik. Teil II
* Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.2, p. 91–102.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_2_91_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1931.

RECENSIONI

G. Vivanti: *Lezioni di Analisi matematica.* In 8° grande: vol. I, pp. VIII+480 (Lire 70); vol. II, pp. 469 (Lire 70): S. Lattes e C., Torino, 1930.

In queste « Lezioni », suddivise in due volumi, trovasi riunita la parte di Analisi algebrica e di Analisi infinitesimale che è programma d'esame per gli studenti di Matematica pura dei primi due anni universitari.

Il primo volume è suddiviso in due parti. Nella prima parte vengono trattati successivamente i seguenti argomenti: numeri reali, numeri complessi: analisi combinatoria, determinanti, equazioni lineari; successioni, serie; funzioni, limiti, continuità, infinitesimi; teoria generale delle equazioni algebriche, risultante e discriminante, trasformazione delle equazioni, equazioni a coefficienti reali, risoluzione numerica delle equazioni. Nella seconda parte sono trattate le derivate e gli integrali delle funzioni di una variabile reale, le derivate ed i differenziali di ordine superiore.

Il secondo volume incomincia col completare l'ultimo argomento del volume precedente, e tratta le derivate e gli integrali delle funzioni di più variabili. Segue la parte relativa alle applicazioni geometriche collo studio delle curve piane, delle curve nello spazio e delle superficie. L'ultima parte tratta delle equazioni differenziali: prima sono studiate le equazioni differenziali ordinarie, poi le nozioni più elementari sulle equazioni a derivate parziali. Vengono successivamente alcuni cenni relativi al Calcolo delle variazioni; ed il libro termina con un'appendice sulle serie di potenze e sulle funzioui trascendenti elementari.

Come ognuno può notare, l'ordinamento della materia è pressochè quello solitamente seguito da tutti i professori universitari, ordinamento che viene imposto dalle necessità che presentano gli insegnamenti contemporanei della Geometria analitica nel primo anno universitario e della Meccanica razionale nel secondo anno. Circa il modo col quale sono sviluppati i singoli capitoli, si deve osservare che ovunque l'esposizione è piana e che in più punti le dimostrazioni sono originali. In tutto il libro spira un certo « quid » di modernità al quale, fra l'altro, contribuisce l'uso del calcolo vettoriale nella parte delle applicazioni geometriche, ed inoltre le numerose note storiche e bibliografiche, a piè di pagina, aventi particolare riguardo al contributo italiano. *a. m.*

S. BANACH, H. STEINHAUS: *Studia Mathematica*, T. II, Lwow (Polonia), 1930.

Sotto la direzione dei due egregi professori dell'Università di Lwow, esce ora il secondo volume della nuova pubblicazione periodica intitolata « Studia Mathematica ». Esso contiene, nelle sue 250 pagine, una ventina di Note e Memorie, quasi tutte di notevole interesse, e riguardanti varî punti di analisi, in particolare sulla teoria dei funzionali, teoria cui la Rivista si intende dedicata in modo speciale, e sui sistemi ortogonali di funzioni. Vanno menzionate particolarmente una comunicazione di H. STEINHAUS sulla probabilità della convergenza delle serie della forma $\Sigma a_n e^{i\varphi_n}$, su cui l'A. dà un teorema curioso, e due lavori di A. ZYGMUND sui sistemi ortogonali, di cui il primo è una estesa Memoria in cui le serie procedenti per funzioni ortogonali di un determinato sistema, p. es. quello di STURM-LIOUVILLE, vengono studiate al punto di vista Riemanniano, cioè a quello della unicità e della *localizzazione* degli sviluppi. I lavori pubblicati in questo tomo sono redatti (ad eccezione di uno in inglese) in francese od in tedesco: la Direzione della Rivista avverte però che sono ammessi anche lavori redatti in italiano. (*u*)

GINO LORIA: *Il passato e il presente delle principali teorie geometriche. Storia e bibliografia.* Quarta edizione totalmente rifatta. Padova, Cedam, 1931-IX (pagg. 467+XXIII, L. 60).

La prima edizione di quest'opera fu pubblicata nelle « Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino » del 1887. Nel 1896, notevolmente accresciuta, apparve in volume (C. Clausen edit.) come seconda edizione: dieci anni dopo ne era necessaria una ristampa, e dopo altri venti anni era divenuta introvabile, in modo da consigliarsi la pubblicazione della presente quarta edizione, che soltanto per vicissitudini editoriali subì ancora un ritardo di quattro anni. È questa la migliore dimostrazione del favore da essa incontrato nel mondo matematico; ed a ragione, perchè, come già si rilevava nella recensione alla 2ª edizione, pubblicata nel « Bollettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche », anno 1898, essa rispondeva al sentito bisogno di un mezzo di orientamento nella vastissima materia. Da quegli anni le condizioni della ricerca bibliografica e della informazione scientifica sono grandemente migliorate per l'avvenuta pubblicazione dei volumi della « Encyclopaedie der Mathematischen Wissenschaften » e per le ripetute edizioni del « Repertorium » del PASCAL, divenuto anch'esso una minore enciclopedia, frutto di collaborazione di numerosi specialisti. Nondimeno, di fronte a queste opere ampie e costose colle quali il presente volume non può e non vuole rivaleggiare, compete ad esso il pregio della mole limitata, della maneggiabilità e di una certa scorrevolezza discorsiva che, senza informare sui precisi risultati delle ricerche particolari, serve a far presente in modo non grave la varietà delle inflessioni di cui il pensiero geometrico è stato capace.

Abbiamo detto scorrevolezza discorsiva, quantunque molte e molte pagine del volume siano occupate da elenchi di memorie particolari che male corrisponderebbero a tale designazione. È che in questi elenchi ci par di vedere — se il paragone sia concesso — piuttosto il prato smaltato di fiori, che invita a cogliere senza ragione e senza scopo, che non la guida al coltivatore: elenchi in cui non è distinzione fra il piccolo e il grande, fra il fondamentale e il transitorio, nei quali inoltre non si vede spesso la regola che ha presieduto all'ordinamento, che non è cronologico, nè per affinità d'argomento o di metodo. In questi limiti modesti, anche quegli elenchi qua e là raggiungono lo scopo; e al lettore già informato compiono talvolta il gradèvole ufficio di ricordare un titolo, un nome, una data (al che è di grande aiuto l'elenco dei nomi degli Autori citati che chiude il volume): mentre sarebbe ingiusto il credere che simile massa bibliografica possa essere dominata da una sola persona e a questa stregua giudicare le intenzioni e il compito dell'Autore.

La quarta edizione è stata accresciuta per l'aggiunta di un intero Libro di circa 160 pagine — un terzo dell'intero volume — destinato alla produzione geometrica dell'ultimo trentennio. Argomento oltremodo difficile e pericoloso, perchè, parlando a geometri viventi di geometri viventi e di geometria vissuta, come era possibile di non incorrere nella taccia di dimenticanze, di equivoci, di errori? Si parla del problema aritmetico-geometrico della determinazione delle trasformazioni cremoniane piane di determinato ordine, e non si trova citato il MONTESANO; si parla della moderna geometria differenziale, nell'indirizzo americano, e non si trova cenno delle ricerche di EISENHART e VEBLEN sulla « geometria dei cammini »; si trova anche nell'indice dei nomi un TONELLI, senza prenome: è in verità il meno recente, ALBERTO TONELLI, l'ex-professore dell'Università di Roma: ma si pensa che, non meno quello del più giovane e vivente (LEONIDA TONELLI) fu più analista che geometra; ma ognun sa che la distinzione non regge, e non si poteva dimenticare quest'ultimo a proposito delle questioni di lunghezza, di area, di area minima.... Ma non vogliamo proseguire in rilievi di questo genere: preferiamo dichiararci completamente d'accordo coll'Autore, che più comune è il fenomeno di lettori che non sentono alcuna riconoscenza per quanto viene loro insegnato del perdono cordiale per quanto per avventura è stato dimenticato: quanto nel libro si può imparare, per lo meno come avvertimento della nostra ignoranza e come stimolo e indirizzo allo studio, è moltissimo, e dobbiamo esserne riconoscenti all'Autore.

Una maggior correttezza tipografica, massime nella trascrizione dei numerosi nomi e titoli stranieri, sarebbe stata desiderabile, e facilmente raggiungibile. B. LEVI

T. A. RAMOS: *Leçons sur le calcul vectoriel.* A. Blanchard, Paris, 1930.

« L'utilità del calcolo vettoriale in tutti i campi della fisica e della geometria è ormai fuori discussione » afferma il prof. RAMOS della Scuola politecnica di S. Paulo del Brasile. Certamente è vero; nondimeno la tradizione dell'uso sistematico delle coordinate è siffattamente radicata, che molti ancora usano di cotesto calcolo il solo linguaggio; utilissimo, del resto, per annodare insieme una quantità di concetti che parevano un tempo disparati.

Pare che non abbiano ben compreso che la caratteristica precipua dell'analisi vettoriale sta non solo nel ragionare sugli enti geometrici e fisici, ma nell'operare direttamente su questi, liberandosi di tutto ciò che è superfluo e artificioso, in quanto dipende dai riferimenti.

Chi può negare che non costituisce progresso grande l'operare direttamente sugli enti detti campi, forze, tensori, piuttosto che su tre, sei, nove, ventisette ecc. grandezze scalari che li definiscono in un dato riferimento e mutano con esso? E a chi non sembrerà evidente che il miglior modo per giungere a cotesto fine non sia di abbandonare le coordinate senz'altro, e di usare un metodo che a quelle non ricorra, ma che le offra poi facilmente ogni qualvolta occorra realmente scendere ai calcoli numerici? E invece si è fatto tutto l'opposto dalla maggior parte dei matematici. Si è fatto e si fa lo sforzo di abbracciare ad un tempo in un calcolo unico tutte le coordinate possibili, introducendo a tal fine una quantità di nozioni complicate e artificiose, e una strana ridda di indici, i quali nascondono spesso — come già altri disse — cose per sè stesse semplicissime.

Poco importa che gli scienziati adoperino adesso nelle loro ricerche il metodo di calcolo che più hanno alla mano: sarebbe sciocco far loro addebiti su questo punto. Ciò che importerebbe oggi si è che volessero riconoscere senza indugio l'importanza didattica del calcolo vettoriale. Si otterrebbe un preziosissimo coordinamento dei varî corsi che si svolgono nelle Università, con economia grande di tempo e di pensiero da parte degli studenti. La parte elementare basterà agli allievi ingegneri; ma ai futuri matematici e fisici sarà utilissima tutta l'analisi vettoriale generale.

Ora vediamo con piacere che queste idee son condivise dalle egregie persone che dirigono la Scuola politecnica di S. Paulo. giacchè apprendiamo dalla breve prefazione al libro del prof. Ramos che è stata istituita colà una cattedra di calcolo vettoriale, ed al corso obbligatorio fanno da complemento altri corsi liberi. fra i quali questo pubblicato dal prof. Ramos e intitolato appunto *Lezioni*. E constatiamo con soddisfazione ch'Egli si è ispirato agli studi di Burali-Forti e Marcolongo; onde possiamo dire che appartiene alla Scuola italiana.

Il libro è diviso in due parti. La prima contiene le nozioni e le formule del calcolo elementare dei vettori e varie applicazioni, le più facili. alla geometria, alla meccanica e alla fisica-matematica. L'egregio Autore non fa uso della derivata d'un vettore rispetto al punto di cui è funzione: nozione fondamentalissima, che gli avrebbe dato modo di considerare le cose da un punto di vista più generale e sintetico, epperò più fecondo, senza per altro introdurre concetti più difficili. Nondimeno, anche senza di ciò, i varî soggetti sono esposti con chiarezza e non di rado con eleganza. Nelle applicazioni ha saputo mostrare la verità di ciò che ha asserito in principio, e cioè l'utilità del calcolo vettoriale.

La seconda parte contiene una esposizione dei principî del calcolo tensoriale nella forma solita, ossia il calcolo assoluto di Ricci e Levi-Civita. Questa non è veramente analisi vettoriale.

Quantunque in Italia si abbiano libri assai più completi di questo intorno all'analisi vettoriale e alle sue applicazioni in tutti i campi, possiamo nondimeno affermare che anche la lettura del libro del prof. Ramos può essere di giovamento ai principianti.

SERENUS D'ANTINOE: *Le livre de la section du cylindre et le livre de la section du cône.* Oeuvres traduites pour la première fois du grec en français, avec une introduction et des notes par PAUL VER EECKE. (Paris, Bruges, 1929).

L'ing. PAUL VER EECKE, profondo ellenista e dotto matematico, cui la scienza è debitrice della traduzione dei maggiori fra i classici della matematica (ARCHIMEDE, APOLLONIO, DIOFANTO), non trascura nemmeno quelli che, pur avendo recato notevoli contributi al progredire della scienza, sono meno noti all'universale degli studiosi. Le traduzioni che egli ha fatto delle *Sferiche di Teodosio* (Bruges, 1927) e questa dei *Libri della sezione del cilindro e del cono* di SERENO, hanno il merito speciale di rendere accessibili opere che hanno un notevole interesse storico e scientifico, ma che prima non potevano essere consultate altro che da quei pochissimi che, ad una perfetta conoscenza delle lingue classiche, sapessero congiungere una sicura padronanza della terminologia e della tecnica proprie dell'epoca classica.

L'opera di SERENO non è certo paragonabile a quella che APOLLONIO ci ha tramandato, ma è tuttavia interessante per notevoli proposizioni che servono di complemento ad alcuni capitoli di opere classiche, o che contengono il germe di teorie che hanno capitale interesse nella sistemazione odierna della scienza matematica.

Fra le prime mi limiterò a citare, nel Libro II, le proposizioni 1, 18, 19, 54, 55, 56, che offrono un utile complemento alla teoria delle proporzioni sviluppata da EUCLIDE nei Libri V, VII e VIII (¹).

E citerò anche la prop. XXXI del Libro I, la quale dimostra che *il luogo geometrico dei coniugati armonici di un punto* O, *rispetto alle intersezioni delle rette uscenti da* O *coi lati di un angolo dato, è una retta uscente dal vertice del dato angolo,* perchè in essa, e nella applicazione che SERENO ne fa per dimostrare che *tutte le rette uscenti da un punto* O *e tangenti ad un dato cono sono in due piani uscenti da* O, si riscontrano gli inizii della teoria della polarità.

La traduzione del PAUL VER EECKE è fedelissima al testo, e rende, anche nella espressione letteraria, lo spirito classico e la

(¹) La 54 dice: Se $a > b > c > d$, e se $a^2 + d^2 = c^2 + b^2$, sarà $a + d < c + b$, la 55 è la reciproca. La 56 dice che se $a + b = c + d$, e se $ab = cd$, le quantità a, b, sono eguali alle quantità c, d, a meno dell'ordine. Queste sono state segnalate (salvo qualche imperfezione di trascrizione) anche nel Manuale del prof. LORIA: *Le scienze esatte nell'antica Grecia.*

forma arcaica del ragionamento e della rappresentazione verbale; ma le difficoltà che da questa rappresentazione potrebbero essere generate sono superate mediante una ricchissima dotazione di note esplicative, che passo passo traducono nella forma moderna e nei simboli a noi consueti gli enunciati e le dimostrazioni, pongono in rilievo le peculiari caratteristiche delle singole proposizioni e segnalano i rapporti eventuali con altre produzioni dell'epoca classica o della moderna. Ho contato non meno di ottocento di tali note! testimonio eloquente della cura amorosa posta nella compilazione dell'Opera, e della vasta erudizione del traduttore.

La Introduzione, insieme con tutte le notizie che si conoscono sulla vita e gli scritti di SERENO, dà una chiara sintesi del contenuto dei libri tradotti, ed è arricchita da note storiche e bibliografiche di notevole interesse.

Da ultimo, comunico una buona notizia: il PAUL VER EECKE ha già ultimato e presto darà alle stampe anche la traduzione delle *Collezioni Matematiche di Pappo.*

ETTORE BORTOLOTTI

PAUL BACHMANN: *Grundlehren der neueren Zahlentheorie.* Göschens Lehrbücherei. I Gruppe, Reine und angewandte Mathematik, Bd. 3. (RM 9,50). Terza edizione. Walter de Gruyter, Berlin, 1931.

Da un rapido confronto con la seconda edizione ho verificato che si tratta propriamente di una ristampa, in nulla diversa dalla edizione precedente. Ciò mi esime dall'entrare in particolari considerazioni circa quest'opera, ben conosciuta da maestri e da scolari, come una delle più idonee alla iniziazione agli studi della *Aritmetica delle forme quadratiche* ed alla *Teoria dei numeri algebrici.* La chiarezza della esposizione e la modernità delle vedute ne formano il pregio principale, pregio ben conosciuto del resto, e confermato dal rapido esito delle precedenti edizioni.

Il Volume è diviso in due sezioni. La prima tratta dei *Corpi numerici razionali* in 5 Capitoli: 1.° Divisibilità. - 2.° Congruenze. - 3.° Resti quadratici. - 4.° Forme lineari. - 5.° Forme quadratiche.

La seconda sezione tratta dei *Corpi numerici quadratici,* in 4 Capitoli: 1.° Numeri, moduli ed ideali del corpo. - 2.° Unità nel corpo quadratico. - 3.° Divisibilità nel corpo quadratico. - 4.° Ideali e reticolati numerici (Gitterzahlen).

ETTORE BORTOLOTTI

D. LEIB: *Applications du Calcul Différentiel et Intégral à 3500 questions de Géométrie, de Mécanique, de Physique, etc.* Traduit de l'anglais par A. SALLIN. Pagg. VIII-306. Paris. A. Blanchard, 1930.

Questo corso di Esercizi di Calcolo, dovuto ad Autore americano, è concepito in un senso escenzialmente pratico. Molti degli esercizi proposti richiedono un risultato numerico al quale conduce una esplicita calcolazione aritmetica, ed in questo senso è da raccomandarsi agli allievi delle nostre Scuole, specialmente di quelle di ingegneria, pei quali il calcolo numerico, spesso trascurato, è pur tanto necessario. Ad esempio, nel Cap. II, sono dati polinomi da derivare mentalmente; lo stesso è fatto nel Cap. III per le derivate successive; nel Cap. V sono da valutarsi il tanto per cento di accrescimento di una data funzione in un dato intervallo; nel Cap. XII, molte delle applicazioni elementari dell'integrazione definita a questioni di meccanica richiedono una risposta numerica, ed altrettanto vale, al Cap. XIII, per le applicazioni dei varî metodi speciali di integrazione, applicazioni che sono facilitate dall'uso di tavole degli integrali indefiniti più frequentemente incontrati, ecc.. Particolarmente copiosa è la raccolta di esempi di equazioni differenziali ordinarie; non mai difficili, ma ben graduati, riferentisi a tutti i casi classici e con interessanti applicazioni alla fisica. È da citare particolarmente la lista dei 157 problemi detti di « Ricapitolazione » sulle equazioni differenziali ordinarie. Poche sono invece le applicazioni delle equazioni alle derivate parziali.

Ogni Capitolo è preceduto da un breve richiamo della rispettiva teoria e da opportune avvertenze. Alla fine del volume si trovano le risposte alle questioni proposte: non però a tutte, essendo ommesse quelle alle domande più ovvie; si trova pure un formulario contenente le espressioni analitiche o di enti geometrici e meccanici di uso più frequente; infine, una tavola, cui si è già accennato, racchiude ben 177 integrali indefiniti di uso comune. Non vi si trova invece una tavola di integrali definiti.

In complesso questa raccolta, che non ha alte pretese scientifiche, ma che per il suo speciale carattere, essenzialmente pratico, non fa doppio impiego coi numerosi volumi dedicati agli esercizi di Analisi infinitesimale, si può con coscienza raccomandare a tutti coloro che nello studio della matematica hanno specialmente in vista le applicazioni. (*n*)

GERHARD KOWALEWSKI: *Integralgleichungen.* (T. 18 della « Göschens Lehrbücherei »). Pag. 302. Leipzig, W. De Gruyter & C°, 1930.

Nella prima edizione dell'opera ben nota sui « Determinanti », dovuta all'Autore del presente volume, e precisamente nei Cap. 18 e 19, si trovavano i principi della teoria delle equazioni integrali. Queste nozioni vennero tolte dalla seconda edizione, per il proponimento dell'A. di dedicare alla teoria delle equazioni integrali un libro apposito, ed è questa l'origine del presente pregevole trattato, dedicato alla memoria di E. STUDY, e destinato agli studenti che vogliono addentrarsi in una importante teoria che costistuisce ormai uno dei capitoli più essenziali dell'Analisi matematica.

Il libro si apre con una sviluppata introduzione (pag. 9–48) destinata a richiamare alcuni problemi ai quali il concetto di equazione integrale deve la sua prima origine, mostrando una volta di più come lo studio di questioni speciali possa condurre alla costruzione di grandiose teorie generali. Viene dapprima ricordato il ben noto problema della tautocrona, che ha condotto l'ABEL a porre per primo una equazione integrale, e di questa viene considerata una prima ed ovvia generalizzazione; seguono altre questioni speciali di inversioni di integrali definiti, o, come si direbbe ora, di equazioni integrali di prima specie: una, in particolare, è elegantemente dedotta dagli integrali di FRESNEL, trattenendosi poi sull'integrale di FOURIER, di cui l'esempio citato è un caso particolare. Viene quindi considerata la riduzione, col LIOUVILLE, del problema di integrazione di una equazione differenziale lineare alla risoluzione di un'equazione integrale, notando che il LIOUVILLE adotta già, nella sua soluzione, il procedimento di sviluppo ritrovato più tardi da C. NEUMANN e da VOLTERRA; è poi indicato, per una analoga riduzione, un altro procedimento fondato sullo sviluppo di TAYLOR e sulla derivazione d'ordine qualunque del LIOUVILLE. Chiude l'Introduzione uno sguardo d'insieme sugli esempî considerati. coll'osservazione che essi hanno condotto esclusivamente ad equazioni di tipo lineare (1).

(1) Alle indicazioni date dall'A. sui lavori che hanno preceduta la costituzione della teoria delle equazioni integrali, qualche altra si sarebbe potuta aggiungere: ad esempio si sarebbero potuti ricordare H. LAURENT, *Sur le Calcul inverse des intégrales définies* (« Journal de Math. », serie III. tomo IV, 1878); S. PINCHERLE, *Studi sopra alcune operazioni funzionali* (« Mem, dell'Acc. di Bologna », serie IV, tomo VI, 1886); Id., *Sur certaines opérations fonctionnelles représentées par des intégrales définies* (« Acta Math. », tomo X, 1887); Id., *Appunti di Calcolo funzionale distributivo* (« Rend. del R. Istituto Lombardo », serie II, tomo XXX, 1897) in cui, a pag. 3, si trova già il determinante di FREDHOLM come trascendente intera.

Il primo Capitolo (pag. 49–50) è dedicato quasi per intero alle equazioni integrali di prima e di seconda specie del nostro VOLTERRA: al caso cioè in cui uno degli estremi dell'integrazione è variabile. Studiando dapprima l'equazione di seconda specie, vengono indicate le analogie coi sistemi di equazioni lineari che hanno condotto, con un passaggio al limite, il VOLTERRA alla sua soluzione; è dimostrata la convergenza dello sviluppo ed il carattere esponenziale di questa convergenza; si insiste a più riprese sul vantaggio della considerazione degli integrali operatori funzionali. Segue la prova della non esistenza, in questo caso, di autovalori, lo studio dell'equazione di prima specie, dei sistemi di più equazioni di VOLTERRA di seconda specie, quegli dei nuclei singolari, infine delle equazioni di VOLTERRA per il caso di due variabili.

Il secondo Capitolo, che comprende non meno di 157 pagine, è dedicato alle equazioni del tipo FREDHOLM, cioè con integrali ad estremi fissi, equazioni il cui studio è sviscerato sotto ai suoi principali aspetti. Dopo di avere osservato come, fra molti altri, il problema dell'integrazione delle equazioni differenziali lineari con valori prefissati agli estremi dell'intervallo conduca ad equazioni integrali di questo tipo, si definiscono le equazioni di prima, di seconda specie ed i sistemi di equazioni; si esprime la soluzione mediante il procedimento dello sviluppo di NEUMANN e si introduce il concetto di nucleo risolvente. Ma una prima condizione sufficiente di convergenza dello sviluppo non basta a fare penetrare nello spirito del metodo, cioè alla celebre formula di risoluzione del FREDHOLM ed al concetto di determinante di questo Autore: e perciò, con sussidi spettanti allo studio di una opportuna successione di determinanti, viene percorsa una prima via per giungere alla formula finale. Una seconda via, analoga a quella tenuta per il tipo VOLTERRA, può riguardarsi come passaggio al limite di un procedimento algebrico, e richiede precise avvertenze ampiamente svolte dall'A. per rendere rigoroso questo passaggio al limite. Notate prima le particolarità del caso in cui il nucleo è a variabili separate, viene poi dato un metodo per la risoluzione nel caso di un nucleo continuo qualunque, considerandolo appunto come limite di un nucleo a variabili separate. Al nucleo con variabili separate è stata collegata ed esposta accuratamente la teoria dei divisori elementari, teoria che serve poi, per ogni radice del determinante di FREDHOLM, radice cui solo più avanti è dato il nome di « Eingenwert » (autovalore), a determinare, appunto per mezzo dei divisori elementari, la struttura del rispettivo nucleo principale e del relativo spazio invariante. Segue, col secondo teorema di FREDHOLM, l'esame delle soluzioni dell'equazione di seconda specie omogenea, e col terzo teorema dello stesso, lo studio dell'equazione non omogenea nel caso in cui il parametro è un autovalore. L'ultima parte del poderoso Capitolo è dedicata allo studio delle proprietà analitiche del nucleo risolvente, segnatamente dei suoi poli, e ad una minuta disamina degli autovalori e delle autofunzioni mercè lo studio dei rispettivi nuclei principali.

Il terzo Capitolo (pag. 249 a 287) è dedicato allo studio dell'equazione di FREDHOLM per il caso importante in cui, essendo il nucleo simmetrico, la teoria può, coll' HILBERT, venire considerato come una estensione della classica teoria delle forme quadratiche: studio in cui l'A. segue preferibilmente l'elegante trattazione di E. SCHMIDT. Viene qui dimostrata la realtà degli autovalori; è trovato il sistema ortogonale e normale delle autofunzioni: è data la decomposizione del nucleo in nuclei semplici della forma $\varphi(x)\varphi(y)$: essendosi fin qui ammessa l'esistenza di almeno un autovalore, di questa esistenza viene poi data la delicata dimostrazione; è pure data la notevole espressione del determinante di FREDHOLM in forma di prodotto infinito. L'ultima parte del Capitolo è consacrata alla teoria, secondo HILBERT e SCHMIDT, della sviluppabilità di una funzione in serie precedente per le autofunzioni di un nucleo simmetrico, al cosidetto « Entwicklungsatz » e si chiude colla distinzione, corredata da esempi, di sistemi ortogonali completi e non completi.

L'ultimo Capitolo, che è il più breve (pag. 288-299), contiene alcune applicazioni della teoria delle equazioni integrali e precisamente al problema delle vibrazioni trasversali delle corde e al problema al contorno per le funzioni armoniche nel piano.

L'A. avverte infine che nel suo libro sono esclusivamente considerate equazioni integrali lineari; egli osserva che per quanto equazioni non lineari si siano ripetutamente presentate in moderne ricerche, pure non si ha, per ora, materiale sufficiente per costruirne una teoria.

Pregevole e ricca di contenuto, l'opera del KOWALEWSKI, anche se un severo ipercritico volesse trovarvi qua e là qualche prolissità e qualche ripetizione, è completa, chiara, ordinata e tale da rappresentare indubbiamente un utile contributo alla odierna produzione matematica. (*u*)

ROTHE R.: *Höhere Mathematik.* Teil II, pagg. VIII+201. Leipzig, B. G. Teubner, 1929.

Questo volume contiene, in un modesto numero di pagine, i fondamenti del calcolo integrale e le prineipali applicazioni di esso alla geometria, alla fisica ed alla meccanica. I notevoli ed appropriati esempi che si trovano intercalati nel testo, le numerose figure e la raccolta di esercizi che accompagna il volume, rendono agevole e vantaggiosa la lettura del trattato.

Nel 1° Capitolo si introducono i concetti di integrale definito ed indefinito e si espongono i classici procedimenti atti alla ricerca delle funzioni primitive.

Il 2° Capitolo è dedicato alle serie di funzioni: il 3° Capitolo agli integrali dipendenti da un parametro, agli integrali curvilinei e ad alcuni accenni alle funzioni analitiche ed al teorema di CAUCHY.

L'ultimo Capitolo contiene un riassunto della teoria dei determinanti e gli elementi del calcolo vettoriale, del quale vien fatto uso per risolvere varî problemi di geometria analitica ed infinitesimale. (*l. o.*)

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Volume 53. Berlin. W. De Gruyter, 1930.

Lo studioso che ha la necessità di conoscere, in breve tempo, il contenuto di una Memoria originale, può consultare, con indubbio profitto, i volumi di questa diffusa ed apprezzatissima rivista.

Infatti, di ogni Nota o Memoria di soggetto matematico, il « Jahrbuch » pubblica un breve ma completo riassunto ed espone in modo chiaro le idee e vedute dell'Autore.

Il valore e la perizia dei numerosi scienziati e specialisti che collaborano in questi annuari, la forma precisa ed esauriente con cui essi sono redatti, permettono al lettore di usarli con piena sicurezza e fiducia, preferendoli anche ad altre opere del genere.

Il volume testè uscito esamina i lavori pubblicati nel 1927 e riferentisi a questioni di Algebra, Analisi, Geometria, Storia, Filosofia e Teoria degli insiemi. (*l. o.*)