BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

PAOLO STRANEO

Teoria unitaria della gravitazione e dell'elettricità

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.3, p. 116–121.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_3_116_0>

Teoria unitaria della gravitazione e dell'elettricità.

Nota di PAOLO STRANEO (a Genova).

Sunto - *Partendo dall'ipotesi di un'opportuna connessione dello spazio-tempo, si deducono equazioni che costituiscono una sintesi geometrica dei fenomeni della fisica (gravitazionali e elettrici) perfettamente analoga a quella einsteniana della sola gravitazione e che ad essa esattamente si riduce in assenza di elettricità. Anche le equazioni di* MAXWELL *risultano formalmente conservate.*

1. Posizione e stato attuale della questione. — È nota la singolare caratteristica che differenzia la teoria della gravitazione di EINSTEIN da tutte le altre sintesi fisiche che l'hanno preceduta. Le classiche equazioni

$$[E] \qquad G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} G g_{\mu\nu} = -k T_{\mu\nu}$$

ammettono una *duplice interpretazione*; 1ª *geometrica*: considerando il *tensore* $T_{\mu\nu}$ come a divergenza nulla, altrimenti *arbitrario*, esse determinano, a meno dell'arbitraria scelta del sistema di riferimento, le *dieci* componenti distinte del *tensore fondamentale* del continuo quadri-dimensionale (spazio-tempo), e quindi la metrica di esso; 2ª *fisica*: considerando il tensore $T_{\mu\nu}$ come *tensore energetico della materia*, esse determinano analogamente le *dieci* componenti del *potenziale (tensoriale) della gravitazione*. È in questo perfetto parallelismo che è contenuto il grande valore sintetico della teoria di EINSTEIN.

Appena sorta la teoria precedente, fu prospettato il problema di *estenderla*, conservandone, si intende, le caratteristiche, *a tutti i fenomeni fisici*. E, fin dal 1918, WEYL pubblicò il suo notissimo tentativo, nel quale è già contenuta l'idea fondamentale, che la generalizzazione in questione implichi un *ampliamento* della struttura dello spazio-tempo, da esprimersi per mezzo dell'ampliamento della sua *connessione*.

Sorvolo sulle considerazioni che si potrebbero fare intorno a questo primo passo decisivo, e mi limito a ricordare che, per qualche tempo, il continuo rappresentativo della teoria einsteiniana fu considerato come un puro *spazio di* RIEMANN, cioè come uno spazio al quale solamente fosse stata *attaccata*, *annessa*, una metrica; uno spazio insomma *disgregato* nei suoi elementi. Ma poi finì di prevalere il criterio di attribuirgli la connessione (la più semplice e fondamentale possibile) che LEVI-CIVITA aveva così genialmente legata alla sua *nozione di parallelismo*, cioè la connessione:

[1] $$L_{\mu}^{\alpha\nu} = \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} = g^{\alpha\varkappa} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\varkappa}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\varkappa}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\varkappa}}\right).$$

Era appunto questa la connessione che si doveva ampliare per far posto a qualche nuovo *ente geometrico* che potesse poi venir posto in parallelo col potenziale elettromagnetico, come già era stato posto il *tensore fondamentale* $g_{\mu\nu}$ in parallelo col *potenziale gravitazionale*.

2. A tale scopo WEYL adottò la connessione.

$$L_{\mu\nu}^{\alpha} = \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} + \delta_{\mu}^{\alpha} \Psi_{\nu} + \delta_{\nu}^{\alpha} \Psi_{\mu} + \delta_{\nu}^{\mu} \Psi_{\alpha},$$

di cui la forma mostra l'evidente proposito di mantenere la simmetria nelle μ, ν.

EDDINGTON passò senz'altro alla connessione simmetrica più generale

$$L_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} + a_{\mu\nu}^{\alpha}$$

con $a_{\mu\nu}^{\alpha}$ tensore simmetrico arbitrario.

Ma come è noto le loro teorie, per quanto interessanti, non risolsero la questione fisica. *L'ampliamento della parte simmetrica della connessione introduce inevitabilmente nel continuo spazio-tempo effettivi caratteri affini che la nostra fisica non può ammettere.*

È evidentemente per questa ragione che EINSTEIN, dopo vari tentativi nell'indirizzo di EDDINGTON (e una breve parentesi in quello, di tipo differente, di KALUZA) dal 1928 si pose per una via nuova. Egli pensò di fondare la teoria unitaria sulla nozione di *metrica* e su quella di *parallelismo assoluto* e, dopo vari tentativi, formulò una teoria, sulla quale, anche a detta del suo illustre autore, non è assolutamente ancor possibile dare un giudizio favorevole. Ad ogni modo, cotesta teoria non sarebbe affatto la generalizzazione che dal 1918 è stata tanto ricercata, oltre che da WEYL, EDDINGTON e dallo stesso EINSTEIN, da molti altri teorici. Potrebbe anche eventualmente esserle superiore, ma non sarebbe mai quella.

E io invece ora solo di quella intendo di occuparmi.

3. La nuova teoria unitaria. — Nulla, assolutamente nulla imponeva la scelta di connessioni simmetriche. Pare anzi che qualche autore, fra cui SCHOUTEN, avesse saggiato connessioni con qualche parte *emisimmetrica*. Ma di esse io non ho ancor potuto aver esatta cognizione. Ad ogni modo non è stata certo risolta la questione in maniera definitiva, perchè lo si sarebbe evidentemente saputo.

La nuova teoria di EINSTEIN assume, in fondo, anch'essa una connessione asimmetrica, ma vincolata dalla condizione del parallelismo assoluto.

In seguito a considerazioni intuitive, che ho esposte in una Nota dei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », considerazioni che mi avevano permesso di orientarmi abbastanza chiaramente, ho voluto saggiare la *connessione costituita dal più semplice termine simmetrico e dal più semplice termine asimmetrico* che fossero possibili, cioè la connessione:

$$\text{[A]} \qquad L^{\alpha}_{\mu\nu} = \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} + 2\delta^{\alpha}_{\mu}\Psi_{\nu},$$

della quale, l'ultimo termine (vettoriale) rappresenta *il più semplice tensore irriducibile di torsione.*

Coll'aiuto di questa connessione, operando come si potrebbe operare per dedurre le equazioni gravitazionali di EINSTEIN dalla connessione [1], giungo *con estrema semplicità* a equazioni fondamentali che hanno *tutti* i requisiti che erano sempre stati desiderati, e in particolare quello di ridursi *esattamente* alle equazioni di EINSTEIN in assenza di elettricità e di non alterare formalmente la teoria elettromagnetica di MAXWELL.

4. Il tensore di curvatura di una generica connessione $L^{\alpha}_{\mu\nu}$

$$L^{\alpha}_{\mu\nu\rho} = \frac{\partial L^{\alpha}_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial L^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\rho}} + L^{\beta}_{\mu\rho} L^{\alpha}_{\beta\rho} - L^{\beta}_{\mu\rho} L^{\alpha}_{\beta\rho}$$

è nel nostro caso particolare della connessione [A]

$$\text{[2]} \qquad L^{\alpha}_{\mu\nu\rho} = R^{\alpha}_{\mu\nu\rho} + 2\delta^{\alpha}_{\mu}\left(\frac{\partial\Psi_{\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\Psi_{\nu}}{\partial x^{\rho}}\right)$$

ove con $R^{\alpha}_{\mu\nu\rho}$ è indicato, come al solito, il tensore di curvatura di RIEMANN.

Il tensore contratto per $\alpha = \rho$, che nella nostra connessione si presenta come l'analogo generalizzato del tensore di RICCI-EINSTEIN $G_{\mu\nu}$, risulta senza alcuna difficoltà

$$\text{[3]} \qquad L^{\alpha}_{\mu\nu\alpha} = L_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + 2\left(\frac{\partial\Psi_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\Psi_{\nu}}{\partial x^{\mu}}\right).$$

L'invariante scalare L, dato l'emisimmetria della seconda parte, si riduce a G.

5. Premesso ciò, in perfetta analogia colla posizione [E] di EINSTEIN, poniamo come equazioni fondamentali:

$$L_{\mu\nu} - \frac{1}{2} L g_{\chi\nu} = E_{\mu\nu},$$

indicando con $E_{\mu\nu}$ un tensore, *per ora arbitrario*, di cui ci riserviamo di disporre opportunamente.

Più esplicitamente, tenute presenti le [3], avremo:

$$\text{[B]} \qquad G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} G g_{\mu\nu} + 2\left(\frac{\partial \Psi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Psi_\nu}{\partial x^\mu}\right) = E_{\mu\nu}.$$

Passiamo ora alla specificazione di $E_{\mu\nu}$.

Osserviamo anzi tutto che $G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} G g_{\mu\nu}$, *anche nella nostra connessione* [A], è un tensore covariante *simmetrico a divergenza nulla*, mentre il tensore $2\left(\frac{\partial \Psi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Psi_\nu}{\partial x^\mu}\right)$ è *emisimmetrico*. Il tensore $E_{\mu\nu}$ dovrà quindi constare di una parte *simmetrica a divergenza nulla* $-kT_{\mu\nu}$, e di una parte *emisimmetrica* $2F_{\mu\nu}$. Il sistema delle nostre equazioni [B] in fondo si può intanto scindere nei due sistemi parziali:

$$\text{[I]} \qquad G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} G a_{\mu\nu} = -kT_{\mu\nu},$$

$$\text{[II]} \qquad \frac{\partial \Psi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Psi_\nu}{\partial x^\mu} = F_{\mu\nu},$$

Ma tenendo conto di quanto abbiamo detto circa la divergenza dei vettori $G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} G g_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$, possiamo evidentemente scrivere anche le equazioni:

$$\text{[III]} \qquad (F^{\mu\nu})_\nu = J^\mu,$$

ove J^μ sarebbe un vettore controvariante *a priori* ancora arbitrario. Disponiamone solo limitatamente nel senso di imporre anche ad esso la *condizione della divergenza nulla*:

$$\text{[4]} \qquad J^\mu_\mu = 0.$$

6. Ma le equazioni [I] hanno ormai esattamente la forma delle equazioni [E] di EINSTEIN, solo sono riferite al nostro continuo eventualmente distorto e si *identificano* con esse in assenza della distorsione caratterizzata dal tensore (vettore) Ψ_ν. È quindi evidente la possibilità e la convenienza di interpretare il tensore $T_{\mu\nu}$ come il tensore energetico nel nostro continuo, scindendolo eventualmente nelle sue due parti rispettive di origine materiale $\mathrm{T}_{\mu\nu}$ e di origine elettromagnetica $\tau_{\mu\nu}$; ciascuna, s'intende, completata con quanto occorre perchè sussista la condizione dell'annullarsi della divergenza, e più precisamente, col *pseudotensore del campo gravitazionale* la prima e col *tensore delle tensioni non maxwelliane* (che non mancano mai all'interno della materia) le seconde (v. EDDINGTON: *Relativitätstheorie*, § 59 e 76). Con ciò il tensore arbitrario $T_{\mu\nu}$ dovrà considerarsi un dato dei singoli problemi, mentre il tensore elettromagnetico $\tau_{\mu\nu}$ sarà legato alle Ψ_ν, anzi alle $F_{\mu\nu}$ dalla solita relazione:

$$\varepsilon_{\mu\nu} = -g^{\rho\sigma} F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma},$$

la quale rimane valida anche nella nostra connessione, perchè in essa, mentre differiscono le derivate covarianti, le divergenze rimangono invece sempre identiche a quelle della connessione riemanniana, elidendosi reciprocamente i termini che dovrebbero esistere in più.

7. Le equazioni [II], [III], colla condizione [4], costituiscono poi notoriamente il sistema delle equazioni di MAXWELL *nello spazio-tempo generale*, quindi anche nel nostro particolare continuo secondo *la connessione* [A], *rispetto alla quale devono naturalmente considerarsi formate le derivate covarianti*. Le [II], come è notissimo, sono *identicamente* soddisfatte, quando siano soddisfatte le [III] e [4], e non hanno altro ufficio che quello di affermare la caratteristica di tipo potenziale del vettore Ψ_ν, che risulta, per ogni arbitraria scelta del vettore J^μ (salva sempre la condizione [4]) determinato *a meno del gradiente di uno scalare*.

È veramente degno di considerazione il fatto che la connessione [A] conduca tanto semplicemente al detto grado di arbitrarietà nella determinazione del vettore Ψ_ν, arbitrarietà che è una delle fondamentali caratteristiche del potenziale elettromagnetico, ma che solo eccezionalmente si riscontra in geometria. È per esso che diviene così spontaneo di porre in parallelo le interpretazioni delle entità J^μ e Ψ_ν, *geometrica* (J^μ vettore arbitrario, Ψ_ν tensore (vettoriale) di torsione) e *fisica* (J^μ ipercorrente, Ψ_ν potenziale elettromagnetico).

8. Osserviamo infine che il sistema complessivo delle equazioni [I], [II] e [III] è compatibile e determina le variabili di campo $g_{\mu\nu}$ e Ψ_ν *proprio nel grado desiderabile*, cioè le $g_{\mu\nu}$ *a meno dell'arbitraria scelta del sistema di riferimento*, e le Ψ_ν *a meno del gradiente di uno scalare*. Infatti fra le [I] esistono, come è notissimo, a cagione dell'annullarsi delle divergenze, 4 identità; fra

le [II], come abbiamo già detto ne esistono 6; finalmente fra le [III], a cagione delle $J_{\nu}^{\mu}=0$ ne esiste 1. Sono dunque $10+6+4=20$ equazioni, fra le quali esistono $4+6+1=11$ identità. Esse determinano quindi le $10+4=14$ variabili di campo a meno dei $4+1=5$ gradi di arbitrarietà che abbiamo discussi, essendo

$$20-11=14-5.$$

9. La principale caratteristica della nuova teoria. — I tratti salienti della nuova teoria verranno illustrati e discussi ampiamente in una prossima pubblicazione. Ricordiamo ora solamente che *il nuovo spazio-tempo è curvo e distorto.* La curvatura è intimamente legata alla presenza di energia; la torsione a quella dell'elettricità. Le rette di questo continuo **non** coincidono in generale colle sue geodetiche; esse sono le sue *autoparallele* (le *paths* degli inglesi). Da ogni suo punto, in ogni direzione, escono una autoparallela e una geodetica, che in generale divergono. Tale divergenza è un indice dell'elettrizzazione.

Nella teoria einsteiniana della sola gravitazione la cosidetta linea oraria di un punto materiale libero era, come è notissimo, una geodetica dello spazio-tempo corrispondente. Nella nostra teoria è invece un' autoparallela.

Anche la linea oraria del moto di un punto materiale elettrizzato, e in particolare di un elettrone, risulta come una piana generalizzazione di quella della teoria einsteiniana.

In base a considerazioni geometriche suggeritemi dall'amico e collega Bompiani, sto ora vedendo se non sia possibile porre in evidenza qualche divario osservabile fra questa teoria e quelle precedenti.