Bollettino Unione Matematica Italiana

Giovanni Sansone

Un criterio sufficiente di convergenza in media per le serie di polinomi di Legendre«

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.3, p. 121–123.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_3_121_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1931.

Un criterio sufficiente di convergenza in media per le serie di polinomi di Legendre.

Nota di G. Sansone (a Firenze).

Sunto. - *L'A. dimostra che se i limiti di indeterminazione di una serie di polinomi di* Legendre *a coefficienti reali si mantengono limitati in* $(-1, 1)$, *la serie converge in media in* $(-1, 1)$ *verso una funzione a quadrato sommabile.*

Sia data la serie

$$a_0 P_0 + a_1 P_1(x) + \dots + a_k P_k(x) + \dots \tag{1}$$

ove $\{a_k\}$ è una successione di costanti reali e $P_k(x)$ il k^{esimo} polinomio di LEGENDRE,

$$P_0 = 1, \quad P_k(x) = \frac{1}{2^k \cdot k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k \qquad k = 1, 2, \ldots;$$

vogliamo dimostrare che *se i limiti di indeterminazione della serie* (1) *si mantengono limitati nell'intervallo* $(-1, 1)$, *la serie data è convergente in media in* $(-1, 1)$ *verso una funzione a quadrato sommabile per la quale vale lo sviluppo* (1).

Per ipotesi, esiste una costante L tale che

$$\left| \sum_1^n {}_k a_k P_k(x) \right| < L \qquad n = 1, 2, \ldots$$

da cui quadrando

$$\sum_1^n {}_k a_k^2 P_k^2(x) + 2\sum_{k<l}^{1\ldots n} a_k a_l P_k(x) P_l(x) < L^2.$$

Dalla formula di ADAMS [1] abbiamo con $k \leq l$:

$$P_k(x)P_l(x) = \sum_0^k {}_r \frac{A_{k-r} A_r A_{l-r} (2l + 2k - 4r + 1)}{(A_{k+l-r} 2l + 2k - 2r + 1)} P_{l+k-2r}(x)$$

con

$$A_0 = 1, \quad A_r = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2r-1)}{r!} \qquad r = 1, 2, \ldots$$

e la (2), qualunque sia x in $(-1, 1)$, diventa

$$(3) \qquad \sum_1^n {}_k \frac{1}{2k+1} a_k^2 + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) + \ldots + c_{2n} P_{2n}(x) < L^2$$

con $c_1, c_2, \ldots, c_n$ costanti reali.

Osserviamo che esistono in $(-1, 1)$ dei valori di x i quali annullano il polinomio

$$A(x) = c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) + \ldots + c_{2n} P_{2n}(x);$$

si ha infatti

$$\int_{-1}^{1} A(x) dx = 0$$

e il polinomio $A(x)$ assumendo in $(-1, 1)$ valori di segno opposto si annullerà almeno una volta. Per tali valori di x la (3) diventa

$$\sum_1^n {}_k \frac{1}{2k+1} a_k^2 < L^2, \qquad n = 1, 2, \ldots;$$

(1) Cfr. E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON, *A course of Modern Analysis*, [3ª ed., 1920, Cambridge], pag. 331.

è convergente quindi la serie $\sum_1^\infty {}_k a_k^2/(2k+1)$ ed anche l'altra serie

$$\sum_0^\infty {}_k \left[\sqrt{\frac{2}{2k+1}}\, a_k\right]^2$$

e poichè il sistema

$$\sqrt{\frac{2k+1}{2}}\, P_k(x) \qquad\qquad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

è ortogonale in $(-1, 1)$ per il teorema di FISCHER-RIESZ (1) la serie data (1) converge in media verso una funzione $f(x)$ a quadrato sommabile tale che

$$a_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x) P_k(x) dx, \qquad\qquad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

c. v. d.

(1) Cfr. ad es. G. VITALI, *Geometria nello spazio Hilbertiano*, [1929, Zanichelli, Bologna], p. 62.