Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Guido Ascoli

Sui baricentri delle sezioni piane di un dominio spaziale connesso

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.3, p. 123–128.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_3_123_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1931.

Sui baricentri delle sezioni piane di un dominio spaziale connesso.

Nota di GUIDO ASCOLI (a Torino).

Sunto. - *In connessione con recenti ricerche di* LEVI-CIVITA *e di* TRICOMI *si dimostra che, sotto condizioni molto generali, per un punto* P *interno al minimo corpo convesso che contiene un dato dominio spaziale limitato e connesso* τ *passa sempre un piano* α *la cui intersezione con* τ *ha il suo baricentro in* P, *e che si determina rendendo uno massimo e l'altro minimo i volumi delle due parti in cui* τ *è diviso da un piano generico passante per* P.

In due Note in corso di stampa nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei il prof. F. TRICOMI, riprendèndo una questione recentemente trattata da LEVI-CIVITA relativa ai baricentri delle sezioni piane di un corpo [1], ha dimostrato tra l'altro che sotto certe condizioni di regolarità, sempre verificate nei casi usuali, salvo al più su qualche linea o superficie eccezionale, per ogni punto interno al minimo corpo convesso τ che contiene il corpo

[1] LEVI-CIVITA T., *Sezioni piane e direttrici ortobariche*. (« Rend. Acc. Lincei », 6ª, XII, 2° sem. 1930).

dato τ passa sempre un piano la cui sezione col corpo τ ha il suo baricentro precisamente nel punto dato. Risultato notevole che permette in generale di assegnare senz'altro il luogo dei baricentri delle sezioni piane di τ.

La dimostrazione di TRICOMI riconduce elegantemente la questione ad una sui campi di vettori definiti su una superficie sferica e ad essa tangenti, già risoluta da un teorema di BROUWER; e con ciò la sua argomentazione risulta estremamente semplice e breve. È però da notare che la dimostrazione data da BROUWER della sua proposizione non può dirsi nè semplice nè elementare; e benchè, come mostrerò in altra occasione, il risultato possa stabilirsi in modo molto più facile, resta sempre desiderabile di giungere in modo più diretto al teorema di TRICOMI.

Il procedimento che indico nella presente Nota mi sembra raggiunga bene tale scopo; esso ha inoltre il vantaggio di applicarsi senza mutamenti al caso del piano come a quello degli spazi superiori, e di integrare il risultato di TRICOMI con un altro (teor. B) che credo nuovo e non privo di interesse.

1. Precisando e ampliando alquanto le ipotesi, in parte sottintese, di LEVI-CIVITA e di TRICOMI, il risultato in esame può enunciarsi nel modo seguente:

A) *Sia* τ *un dominio spaziale limitato, internamente connesso e* $\bar{\tau}$ *il minimo corpo convesso che contiene* τ; *sia* P *un punto interno a* $\bar{\tau}$ *e siano dotate di area (nel senso di Peano e Jordan) le sezioni di* τ *con i piani passanti per* P. *Se queste sezioni variano con continuità al variare del piano secante, una almeno di esse ha il baricentro in* P.

Per giustificare pienamente questo enunciato non sarà inutile qualche osservazione. In conseguenza di note proprietà caratteristiche dei punti del minimo aggregato convesso che contiene un dato aggregato chiuso [1], ogni piano per P lascia da una parte e dall'altra punti τ; quindi anche punti *interni* a τ. Ne segue, per la supposta connessione interna, che esistono sul piano punti interni a τ, e quindi interni alla sezione. Questa non ha dunque mai area nulla.

L'ipotesi della continuità della variazione della sezione al variare del piano secante riceve senso preciso da una opportuna definizione di *distanza* di due sezioni; questa è indicata in sostanza

[1] Cfr. CARATHÉODORY C., *Ueber den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen.* (« Rend. Circ. Matem. Palermo », XXXII, 2° sem. 1911), I; STEINITZ, *Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme.* (« Journ. f. reinen u. ang. Math. », B. 193, 1913).

da TRICOMI nella sua prima Nota e coincide essenzialmente con una già usata da vari Autori e specialmente conveniente nel caso di aggregati chiusi. [1] Si assume con questa come distanza $\delta(A, B)$ tra gli aggregati A, B il limite superiore delle distanze di ciascun punto di ciascun aggregato dall'altro. Se A e B sono chiusi e $\delta(A, B)=0$, A e B coincidono; e se $\delta(A, B)<\varepsilon$, A (B) è contenuto nell'aggregato delle sfere aventi i centri nei punti di B (di A) e raggio ε.

L'ipotesi del teorema è allora questa: che se un piano α per P determina la sezione s, per ogni $\varepsilon>0$ esista un $\eta>0$ tale che un piano α' per P che formi con α un angolo $<\eta$ determina una sezione s' tale che $\delta(s, s')<\varepsilon$.

2. Noi dedurremo il teorema A) dal seguente:

B) *Nella ipotesi del teor.* A), *esiste un piano per* P *che renda uno massimo e l'altro minimo i volumi delle due parti in cui* τ *è diviso da un piano generico passante per* P (*o i loro rapporti*); *la sua sezione con* α *ha il baricentro in* P.

Si noti che nelle ipotesi poste i volumi considerati esistono e si esprimono facilmente con integrali di RIEMANN, come si dirà tra poco.

Per dimostrare il teorema B), si osservi anzitutto che descritta una superficie sferica Σ di centro P, ad ogni punto M di essa corrisponde un piano $\alpha(M)$ per P: quello perpendicolare a PM; e anche il semispazio determinati da $\alpha(M)$ e contenente M. La parte di τ contenuta in questo semispazio si dica $v(M)$; il volume di $v(M)$ è funzione continua di M. Infatti se M, M' sono punti di Σ tali che $\widehat{MOM'}=\varepsilon$, la quantità $|\text{vol. } v(M) - \text{vol. } v(M')|$ è differenza di due volumi ciascuno dei quali è minore del volume di un settore cilindrico, di raggio R, altezza $2R$ e ampiezza ε, dove R indica la massima distanza di P dai punti di τ. E quest'ultimo volume vale $R^3\varepsilon\, 2$, infinitesimo con ε.

Poichè M varia in un aggregato chiuso, esiste una posizione M_0 di M per cui $v(M)$ ha volume minimo, [2] per il punto opposto

[1] Questa definizione è largamente studiata da HAUSSDORFF, *Mengenlehre*, Berlin, 1927 e da lui attribuita a D. POMPEJU (l. c. pag. 280). V. anche, per recenti applicazioni: SEVERI, *Ancora sull'area di una superficie curva.* (« Rend. Acc. Lincei », 6ª, V, 1° sem. 1927) pag. 476; *Sull'insieme dei punti singolari di una funzione analitica di più variabili.* (Id. id., 6ª, XI, 1° sem. 1929), pag. 918.

[2] Si veda per es. CARATHÉODORY C., *Vorlesungen über reelle Funktionen* (Leipzig, 1918) pag. 139; PICONE M., *Lezioni di Analisi infinitesimale* (Catania, 1923), I, pag. 96.

M_0' si avrà il volume massimo. Diciamo ora che la corrispondente sezione ha il baricentro in P. Sia infatti r una retta di $\alpha(M_0)$, passante per P e si assuma nel fascio di semipiani per r una coordinata angolare θ in modo, per esempio, che i semipiani $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ cadano su $\alpha(M_0)$ e il semipiano $\theta = \frac{\pi}{2}$ passo per M_0. Essa vale anche come coordinata di M sul cerchio in cui varia questo punto.

Detta allora $s(\theta)$ la sezione di τ col semipiano di anomalia θ, l'elemento di volume di τ è $ds \cdot \eta d\theta$, dove η è la distanza di un punto dell'elemento da r, e il volume di un generico $V(M)$ ha la forma:

$$\text{vol. } v(M) = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} d\theta \int_{s(\theta)} \eta \, ds = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} I(\theta) \, d\theta$$

dove $I(\theta)$ è, come si vede, il *momento* di $s(\theta)$ rispetto ad r. Ora dalle ipotesi poste segue facilmente — e torneremo su questo punto più innanzi — che $I(\theta)$ è funzione continua di θ; segue che vol. $v(M)$ ammette derivata rispetto ad α, ed essa vale $I(\alpha + \pi) - I(\alpha)$.

Per $\alpha = 0$ il volume di $v(M)$ è minimo; si ha dunque

$$I(0) = I(\pi)$$

od anche, introducendo la distanza con segno $y = \eta$ in $s(0)$, $y = - \eta$ in $s(\pi)$:

$$\int_{s(0)+s(\pi)} y \, ds = 0$$

e ciò dimostra che il baricentro della sezione sta su r. Di qui, per l'arbitrarietà di r, segue il teorema.

3. Per dimostrare la continuità di $I(\theta)$, che ha parte essenziale nella dimostrazione precedente, si può seguire il metodo usato da Tricomi nella sua prima Nota; occorre solo una leggera modificazione del procedimento, per evitare la considerazione della linea di contorno di una sezione e della sua lunghezza, che nelle nostre ipotesi può non essere lecita.

Basterà dimostrare la continuità per $\theta = 0$ e supporre intanto $|\theta| < \frac{\pi}{2}$. Per ipotesi, per un dato $\varepsilon > 0$, esiste un $\varepsilon' > 0$ tale che per $|\theta| < \varepsilon'$ la distanza tra le intere sezioni $s(\theta) + s(\theta + \pi)$, $s(0) + s(\pi)$ è $< \varepsilon$; si vede subito che sarà $< \varepsilon$ anche la distanza tra $s(\theta)$ e $s(0)$.

Si proietti ortogonalmente $s(\theta)$ sul piano di $s(0)$ in $s'(\theta)$; se A è un punto di $s(0)$, B' un punto di $s'(\theta)$, proiezione del punto B di $s(\theta)$, si ha $AB' \leq AB$, donde, facendo variare una volta A, e una volta B e B' segue:

$$\delta(B', s(0)) \leq \delta(B, s(0)), \quad \delta(A, s'(\theta)) \leq \delta(A, s(\theta))$$

e di qui:

$$\delta(s(0), s'(\theta)) < \varepsilon$$

Da ciò si deduce facilmente che l'area della parte di $s(0)$ esterna a $s'(\theta)$, e della parte di $s'(\theta)$ esterna a $s(0)$ sono ambedue infinitesime con θ. Si osservi anzitutto che la distanza dei due aggregati $s(0)$, $s(\theta)$ è eguale a quella dei loro contorni; se quindi si eseguisce in $\alpha(0)$ una quadrettatura in cui ogni quadretto abbia diagonale $< \varepsilon$ e si considerano i quadretti che contengono punti di contorno di $s(0)$ e i quadretti adiacenti, nel dominio da essi formato stanno ambedue i contorni di $s(0)$ e di $s'(\theta)$ quindi anche le parti di $s(0)$ e $s'(\theta)$ rispettivamente esterne a $s'(\theta)$ e a $s)0)$. Onde le aree di queste due parti sono certo inferiori a nove volte l'area totale dei quadretti che contengono punti di contorno di $s(0)$, area che tende a zero con ε, e quindi con θ, per la quadrabilità del dominio $s(0)$.

Con questi elementi la prova della continuità di $I(\theta)$ è ora immediata. Si ha subito, indicando con σ la parte comune a $s'(\theta)$ e a $s(0)$:

$$\int_{s'(\theta)} \eta ds = \cos^2\theta \int_{s(\theta)} \eta ds$$

$$\left| \int_{s'(\theta)} \eta ds - \int_{s(0)} \eta ds \right| = \left| \int_{s'(\theta)-\sigma} \eta ds - \int_{s(0)-\sigma} \eta ds \right|$$

$$\leq \max \eta \cdot [\text{area}\,(s'(\theta) - \sigma) + \text{area}\,(s(0) - \sigma)]$$

e di qui, poichè η è limitato:

$$\lim_{\theta \to 0} I(\theta) = \lim_{\theta \to 0} \int_{s'(\theta)} \eta ds = I(0),$$

4. Il procedimento precedente è senz'altro applicabile ad ogni spazio euclideo S_n, ove ai piani per P e alla retta r si sostituiscano rispettivamente gli S_{n-1} per P e un S_{n-2}, pure per P, dell'S_{n-1} estremante.

Rimanendo per chiarezza nel caso $n = 3$, si può ora concludere, con Tricomi, che se la condizione di continuità posta per le sezioni piane contenenti P si estende a tutte indistintamente le sezioni piane di τ, si può affermare che *il luogo dei baricentri delle sezioni piane di τ, contenenti punti interni, è l'interno del minimo corpo convesso $\bar{\tau}$ che contiene τ.*

Ogni punto interno a $\bar{\tau}$ è infatti allora baricentro di una sezione piana, mentre non lo è un punto di contorno o esterno, poichè per esso passa un piano radente a $\bar{\tau}$, il quale lascia quindi ogni sezione piana determinata da piani passanti per il punto tutta da una parte; dimodochè il momento della sezione rispetto al piano risulta positivo [1].

[1] Mentre attendo alla correzione delle bozze di stampa, mi viene segnalata dall'illustre prof. G. PEANO una sua Nota del 1888: *Teoremi su massimi e minimi geometrici e su normali a curve e superficie* (« Rend. Palermo », II) ove, in un gruppo di eleganti proposizioni, date senza dimostrazione, compare a pag. 192 la seguente: *Se un piano mobile* π *taglia da un corpo* τ *un volume costante, il punto di contatto di* π *col suo inviluppo è baricentro della sezione che* π *determina in* τ. È evidente il nesso tra questo teorema e il nostro teor. B, che potrebbe certamente esser dedotto da quello, sia pure sotto ipotesi alquanto più restrittive.