CESARE RIMINI

Dimostrazione assoluta di un teorema di Gauss

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.3, p. 128–131.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_3_128_0>

Dimostrazione assoluta di un teorema di Gauss.

Nota di CESARE RIMINI (a Bologna).

Sunto. - *In questa Nota si dà una dimostrazione assoluta rigorosa del celebre teorema di* GAUSS *relativo alla invarianza per flessione della curvatura totale di una superficie.*

1. Se P, P_1 è una coppia generica di punti corrispondenti di due superficie S ed S_1 fra loro applicabili, la uguaglianza

$$dP_1^2 = dP^2 \tag{1}$$

mostra che le relazioni

$$dP_1 = \beta dP, \quad \boldsymbol{n}_1 = \beta \boldsymbol{n} \tag{2}$$

(dove $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}_1$ sono vettori unitari normali ad S ed S_1 in P e P_1 rispettivamente) sono compatibili ed atte a definire una isomeria β, dello spazio ambiente, funzione di P variabile su S. Senza ledere la generalità, potremo intendere che sia $I_3 \beta = 1$, bastando, in caso contrario, mutare $\boldsymbol{n}_1$ in $-\boldsymbol{n}_1$.

Per le curvature totali delle due superficie in P e P_1 si hanno le note espressioni ([2]):

$$\mathcal{K} = \frac{d\boldsymbol{n} \wedge \delta\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}}{dP \wedge \delta P \times \boldsymbol{n}}, \quad \mathcal{K}_1 = \frac{d\boldsymbol{n}_1 \wedge \delta\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_1}{dP_1 \wedge \delta P_1 \times \boldsymbol{n}_1}, \tag{3}$$

([2]) Cfr. BURGATTI, BOGGIO, BURALI-FORTI, *Analisi Vettoriale Generale*, vol. II, parte I, cap. II, n. 6.

dove d, δ sono simboli di differenziali indipendenti, tali cioè che $dP \wedge \delta P \neq 0$ (e quindi, per la (2), anche $dP_1 \wedge \delta P_1 \neq 0$).

Un noto teorema di GAUSS, che qui ci proponiamo di dimostrare per via assoluta, asserisce che $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1$.

Siccome i denominatori delle espressioni (3) sono manifestamente uguali, a causa di $I_3\beta = 1$, tutto si riduce a dimostrare la uguaglianza dei numeratori.

All'uopo si osservi che differenziando la seconda delle (2) si ha:

$$dn_1 = \beta dn + d\beta \cdot n, \quad \delta n_1 = \beta \delta n + \delta\beta \cdot n. \tag{4}$$

D'altro canto, differenziando la

$$K\beta \cdot \beta = 1,$$

relazione caratteristica delle isomerie (equivalente a $K\beta = \beta^{-1}$), e ricordando che gli operatori K e d sono commutabili, si ha:

$$\beta^{-1} d\beta = - K(\beta^{-1} d\beta).$$

Ne segue che $\beta^{-1} d\beta$ è assiale. Detto u il suo asse, si ha la prima delle due relazioni:

$$d\beta = \beta \cdot u \wedge, \quad \delta\beta = \beta \cdot v \wedge, \tag{5}$$

dove u e v indicano vettori infinitesimi.

Dalle (4) e (5) si trae subito, ricordando, al solito, che $I_3\beta = 1$:

$$dn_1 \wedge \delta n_1 \times n_1 = (dn + u \wedge n) \wedge (\delta n + v \wedge n) \times n.$$

Sviluppando il secondo membro, si riconosce che la differenza fra i numeratori delle espressioni (3) vale:

$$\begin{aligned}(u \wedge n) \wedge \delta n \times n + dn \wedge (v \wedge n) \times n + (n \wedge u) \wedge (n \wedge v) \times n = \\ = u \times \delta n - v \times dn + u \wedge v \times n.\end{aligned} \tag{6}$$

Importa ora far vedere che u (e così v) è vettore tangente ad S. Infatti, differenziando (con d) la

$$\beta \delta P = \delta P_1$$

e tenendo presente la prima delle (5), si ottiene:

$$\beta(u \wedge \delta P) = d\delta P_1 - \beta d\delta P.$$

Moltiplicando ($\times$) per dP dopo aver applicato ai due membri β^{-1} (che esiste certamente) si ha:

$$\begin{aligned}u \wedge \delta P \times dP = \beta^{-1} d\delta P_1 \times dP - d\delta P \times dP = d\delta P_1 \times \beta dP - \\ - d\delta P \times dP = d\delta P_1 \times dP_1 - d\delta P \times dP.\end{aligned}$$

L'ultimo membro è nullo, come si riconosce differenziando la (1) e ricordando che i simboli d e δ sono commutabili, quindi l'asserto è dimostrato.

Se ora differenziamo la prima delle (5) con δ e la seconda con d e confrontiamo i risultati, tenendo conto delle (5) stesse, otteniamo:

$$\beta \cdot (dv - \delta u) \wedge = \beta \cdot v \wedge \cdot u \wedge - \beta \cdot u \wedge \cdot v \wedge ,$$

da cui, per essere β propria, segue:

$$(dv - \delta u) \wedge = v \wedge \cdot u \wedge - u \wedge \cdot v \wedge = (v \wedge u) \wedge$$

cioè

$$dv - \delta u = v \wedge u. \tag{7}$$

D'altra parte, differenziando le

$$u \times n = 0, \quad v \times n = 0$$

rispettivamente con δ e con d, si hanno le relazioni:

$$\delta u \times n + u \times \delta n = 0, \quad dv \times n + v \times dn = 0,$$

dal confronto delle quali, con riguardo alla (7), segue che il secondo membro della (6) è identicamente nullo.

Il teorema di GAUSS resta così rigorosamente dimostrato.

2. La dimostrazione qui esposta colma una lacuna contenuta nell'analogo procedimento proposto dal compianto prof. BURALI-FORTI ([1]). Questi invero, giunto alla (6), conclude il suo ragionamento asserendo che quella espressione è infinitesima del terzo ordine, il che si verificherebbe — così Egli dice — per essere i vettori u e v infinitamente poco inclinati rispetto ad n ([2]). Ma ciò non è; anzi, come si è visto, essi sono invece tangenziali.

Si può notare che, se u, v sono gli assi delle assiali $\beta^{-1}d\beta$, $\beta^{-1}\delta\beta$ pertinenti agli spostamenti dP, δP, sarà $u + mv$ quello relativo allo spostamento $dP + m\delta P$, qualunque sia m, onde si conclude che esiste una omografia α a due dimensioni ([3]) (operante nel piano tangente ad S) funzione di P, tale che

$$u = \alpha dP, \quad v = \alpha \delta P.$$

([1]) Cfr. « Rend. Acc. Lincei », vol. XVIII, 1° sem. 1909, pagg. 238-241; (cfr. anche Libro citato, parte I, cap. V, n. 3).

([2]) Da ciò infatti seguirebbe che gli angoli fra u e δn, fra v e dn sono infinitamente poco diversi da un retto, e che quello fra u e v è infinitesimo, con che ciascuno dei tre prodotti costituenti il secondo membro della (6) conterrebbe tre fattori infinitesimi.

([3]) Circa le proprietà di questa omografia, veggasi la Nota dell'A., *Sulla flessione delle superficie*, in corso di pubblicazione nei « Rendiconti Acc. Lincei », (seduta del 17 maggio 1931).

Ora, la sola ovvia constatazione della dipendenza lineare degli u dai dP è sufficiente per dimostrare la inesattezza dell' affermazione di BURALI-FORTI, giacchè da essa segue che, al variare di dP parallelamente al piano tangente, gli u variano parallelamente ai raggi di un fascio, e pertanto non possono mantenersi infinitamente poco inclinati rispetto a verun vettore fisso.

3. È utile notare che ai differenziali dell' isomeria β si può anche dare la forma

$$(5') \qquad d\beta = u_1 \wedge \beta, \quad \delta\beta = v_1 \wedge \beta,$$

essendo $u_1 = \beta u$, $v_1 = \beta v$, perchè dalle (5), per x qualunque, si ha, ricordando che $I_3\beta = 1$:

$$d\beta \cdot x = \beta(u \wedge x) = (\beta u) \wedge \beta x = [(\beta u) \wedge \beta]x:$$

e si può anzi precisare che l'assiale $u_1 \wedge = d\beta \cdot \beta^{-1}$ non è che la trasformata $\beta(\beta^{-1}d\beta)\beta^{-1}$ della $\beta^{-1}d\beta$ mediante β.

Segue in particolare che i vettori u_1, al variare di dP, variano parallelamente al piano tangente in P_1 ad S_1, cioè si ha:

$$u_1 \times \beta n = 0, \quad v_1 \times \beta n = 0:$$

mentre, operando come dianzi, si ottengono le relazioni:

$$(7') \qquad dv_1 - \delta u_1 = u_1 \wedge v_1,$$

$$(6') \qquad u_1 \times \beta\delta n - v_1 \times \beta dn + u_1 \wedge v_1 \times \beta n = 0,$$

mediante le quali, imitando il procedimento indicato al n. 1, si perviene ancora alla relazione $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1$.