# Bollettino Unione Matematica Italiana



Giovanni Ricci


## Due proprietà caratteristiche delle funzioni a rapporto incrementale limitato


*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1*, Vol. **10** (1931), n.3, p. 131–134.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_3_131_0>



L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI*

http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1931.

## Due proprietà caratteristiche delle funzioni a rapporto incrementale limitato.

Nota di GIOVANNI RICCI (a Pisa).

**Sunto.** - *Si stabiliscono due proprietà caratteristiche delle funzioni a rapporto incrementale limitato, delle quali la prima è analoga a quella che definisce l'assoluta continuità delle funzioni, e la seconda ne riguarda la variazione totale.*

**1.** È noto che, seguendo G. VITALI, una funzione $f(x)$ della variabile reale $x$, definita nell' intervallo $(a, b)$ si dice ivi *assolutamente continua* quando prefissato un numero $\varepsilon$ positivo arbitrario si può determinare un numero $\delta$ positivo tale che, per ogni insieme di intervalli $(a_i, b_i)$, $(i = 1, 2, ..., m)$, di $(a, b)$, in numero finito qualunque, ***non sovrapponentisi*** ed aventi una lunghezza complessiva minore di $\delta$, risulti (1)

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \{f(b_i) - f(a_i)\} \right| < \varepsilon.$$

La definizione enunciata è equivalente a quella ottenuta sostituendo all' ultima diseguaglianza la seguente

$$\sum_{i=1}^{m} \left| f(b_i) - f(a_i) \right| < \varepsilon.$$

In passato, qualche autore introdusse per l'assoluta continuità delle funzioni $f(x)$ la definizione che si ottiene dalla precedente sopprimendo le due parole « non sovrapponentisi »; le condizioni che si venivano ad imporre per l'assoluta continuità erano evidentemente non meno restrittive che le attuali, anzi si può affermare che esse erano *più restrittive* in quanto, come è già stato osservato (2), tali condizioni vengono a caratterizzare la classe delle funzioni a rapporto incrementale limitato (uniformemente lipschitziane), la quale è una classe particolare delle funzioni assolutamente continue.

Scopo delle presenti righe è di dimostrare questo fatto, cioè:

*Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione* f(x) *della variabile reale* x *definita nell' intervallo* (a, b) *sia ivi a rapporto incrementale limitato (uniformemente lipschitziana) è che scelto comunque un numero positivo* $\varepsilon$, *si possa determinare un numero positivo* $\delta$ *tale che, per ogni insieme di intervalli* $(a_i, b_i)$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, *(eventualmente anche sovrapponentisi) in numero finito qualunque ed aventi una lunghezza complessiva minore di* $\delta$, *cioè*

(1) $$\Sigma |b_i - a_i| < \delta,$$

*risulti*

(2) $$\left| \sum_{i=1}^{m} |f(b_i) - f(a_i)| \right| < \varepsilon.$$

*Il teorema seguita a sussistere quando si sostituisca alla* (2) *la diseguaglianza*

(3) $$\sum_{i=1}^{m} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

La condizione è necessaria. Supponiamo che esista un numero $L$ tale che per ogni coppia $x'$, $x''$ di punti dell' intervallo $(a, b)$ sia

(1) Vedi L. Tonelli, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Bologna, 1921, p. 63; Ch. De La Vallée Poussin, *Intégrales de Lebesgue, Fonctions d'ensemble, Classes de Baire*, Paris, 1916, p. 77.

(2) Vedi L. Tonelli, *Sulla ricerca delle funzioni primitive*, Nota I, (« Rendiconti Acc. Lincei », serie 5ª, vol. 29, p. 45), nota a piè di pagina.

(condizione di LIPSCHITZ)

$$\left|\frac{f(x')-f(x'')}{x'-x''}\right|<L,$$

allora risulta

$$|f(b_i)-f(a_i)|<L\,|b_i-a_i|$$

quindi

$$\left|\sum_{i=1}^{m}|f(b_i)-f(a_i)|\right|\leq\sum_{i=1}^{m}|f(b_i)-f(a_i)|<L\sum_{i=1}^{m}|b_i-a_i|$$

e fissato comunque $\varepsilon$ positivo, basta prendere $\delta<\varepsilon\,L$ perchè la (2) e la (3) seguano dalla (1).

La condizione è sufficiente. Dimostreremo che se $f(x)$ non è a rapporto incrementale limitato è impossibile soddisfare alla condizione dell'enunciato.

Sia $f(x)$ non a rapporto incrementale limitato; se essa è discontinua evidentemente è impossibile soddisfare alla condizione in discorso che richiede la continuità; ci rimane dunque a studiare il caso di $f(x)$ continua in $(a, b)$, della quale denoteremo con $M$ il massimo in $(a, b)$.

Fissiamo $\varepsilon$ positivo arbitrario e supponiamo che sia possibile determinare in conseguenza il numero $\delta$ pel quale dalla (1) segua la (2) (e la (3)); per l'ipotesi su $f(x)$ è possibile determinare una coppia di punti $x'$, $x''$ dell'intervallo $(a, b)$ pei quali è

$$\left|\frac{f(x')-f(x'')}{x'-x''}\right|>\begin{cases}2\dfrac{\varepsilon}{\delta}\\[2mm] 4\dfrac{M}{\delta}.\end{cases}$$

Le due diseguaglianze porgono rispettivamente

$$|f(x')-f(x'')|>\frac{2|x'-x''|}{\delta}\cdot\varepsilon$$

$$\frac{2|x'-x''|}{\delta}<\frac{|f(x')-f(x'')|}{2M}\leq 1.$$

Determiniamo un intero $m$ per cui

$$\frac{\delta}{2}<m\,|x'-x''|<\delta,\quad \text{cioè}\quad 1<m\frac{2|x'-x''|}{\delta}<2$$

allora è

$$|m\,|f(x')-f(x'')||=m\,|f(x')-f(x'')|>m\frac{2|x'-x''|}{\delta}\cdot\varepsilon>\varepsilon,$$

dunque l'intervallo di estremi $x'$, $x''$ ripetuto $m$ volte dà un insieme di intervalli pel quale dalla (1) non segue la (2) e neppure la (3). Per l'assurdo il teorema risulta dimostrato.

**2.** Come corollario del teorema precedente, detta $V(x)$ la *variazione totale* della funzione $f(x)$ in $(a, x)$ [1], dimostriamo:

*Condizione necessaria e sufficiente perchè* f(x) *sia a rapporto incrementale limitato è che lo sia anche* V(x).

La condizione è sufficiente, poichè dalla definizione di $V(x)$ segue

$$|f(x') - f(x'')| \leq | V(x') - V(x'')|.$$

La condizione è necessaria. Infatti, se comunque si fissi $\varepsilon(>0)$ è possibile determinare $\delta(>0)$ in guisa che dalla (1) segua la (3); suddivisi gl' intervalli $(a_i, b_i)$ comunque in parti $(c_{i,r}, c_{i,r+1})$ si ottiene ancora un insieme di intervalli per cui vale

$$\sum_{i,r} | c_{i,r+1} - c_{i,r} | < \delta, \quad \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{r} | f(c_{i,r+1}) - f(c_{i,r}) | \right| < \varepsilon.$$

Per la definizione di variazione totale la somma $\sum_{r} | f(c_{i,r+1}) - f(c_{i,r})|$ si può rendere prossima a $V(b_i) - V(a_i)$ tanto quanto si vuole, quindi risulta anche (si suppone per fissare le idee $a < b$, $a_i \leq b_i$)

$$\sum_{i=1}^{m} | V(b_i) - V(a_i) | < \varepsilon$$

e pel teorema precedente anche $V(x)$ è a rapporto incrementale limitato.

[1] Vedi L. TONELLI, l. c. in [1] della p. 132, p. 41 e 64; M. PICONE, *Lezioni di Analisi Infinitesimale*, Catania, 1923, p. 613.