Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Armando Chiellini

Sulla serie $\sum_1^\infty \frac{n^r}{n!}$

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.3, p. 134–138.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_3_134_0>

Sulla serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^r}{n!}$.

Nota di ARMANDO CHIELLINI (a Pisa).

Sunto - *L'Autore determina in maniera puramente aritmetica ed elementare la somma della serie* $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^r}{n!}$ *e trova alcune proprietà interessanti per l'espressione* $f(kr) = \sum_{1}^{k}{}_{\alpha} (-1)^{\alpha} \binom{k}{\alpha} \alpha^r$.

Il prof. SCHWATT in un suo recente libro [2] studia l'operatore differenziale

$$p = x \frac{d}{dx}$$

[2] SCHWATT, *An introduction to the operations with series.* (« Press of the University of Pensylvania ». Philadelphia, 1924).

e trova per esso la formula

(1) $$p^n(\psi) = \sum_{1}^{n}{}_k a_{nk} x^k \frac{d^k\psi}{dx^k}$$

dove i coefficienti a_{nk} risultano definiti dall'uguaglianza

$$a_{nk} = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{1}^{k}{}_\alpha (-1)^\alpha \binom{k}{\alpha} \alpha^n$$

ed inoltre soddisfano all'equazione ricorrente

$$a_{nk} = k a_{n-1,\,k} + a_{n-1,\,k-1}.$$

Servendosi poi della (1) trova per la somma $S(x)$ della serie

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{n^r}{n!} x^n$$

l'espressione

$$S(x) = e^x \cdot \sum_{1}^{r}{}_k \left\{ \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{1}^{k}{}_\alpha (-1)^\alpha \binom{k}{\alpha} \alpha^r \right\}$$

e quindi, in particolare

$$S(1) = \Sigma \frac{n^r}{n!} = e \cdot \sum_{1}^{r}{}_k \left\{ \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{1}^{k}{}_\alpha (-1)^\alpha \binom{k}{\alpha} \alpha^r \right\} = \left(\sum_{1}^{r}{}_k a_{nk} \right) \cdot e.$$

Da questa formula non risulta immediatamente che il fattore per cui viene moltiplicato e sia un numero intero ed inoltre si ottiene con procedimenti niente affatto semplici. D'altra parte, data la notevole importanza della serie $\sum \frac{n^r}{n!}$, che serve al calcolo delle somme $S_{nk} = \sum_{1}^{n}{}_p p^k$, non credo inutile mostrare come si possa giungere al calcolo della serie in discorso mediante una via puramente aritmetica ed elementare.

A questo scopo proponiamoci di vedere se è possibile determinare r costanti opportune per cui si abbia identicamente

(2) $$\frac{n^r}{n!} = \frac{n^{r-1}}{(n-1)!} = \frac{b_{r1}}{(n-1)!} + \frac{b_{r2}}{(n-2)!} + \dots + \frac{b_{r,\,r-1}}{(n-r+1)!} + \frac{b_{rr}}{(n-r)!};$$

riducendo a forma intera, risulta subito

(3) $$n^{r-1} = \sum_{1}^{r}{}_k D_{n-1,\,k-1} b_{rk},$$

dove abbiamo, al solito, indicato con $D_{n-1,\,k-1}$ il numero delle disposizioni di $n-1$ elementi della classe $k-1$.

Ponendo successivamente nella (3) $n = 1, 2, 3, \ldots, r$, avremo il sistema

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
&b_{r1} = 1^{r-1}\\
&1!\, b_{r2} + b_{r1} = 2^{r-1}\\
&2!\, b_{r3} + 2!\, b_{r2} + b_{r1} = 3^{r-1}\\
&3!\, b_{r4} + 3!\, b_{r3} + 3b_{r2} + b_{r1} = 4^{r-1}\\
&4!\, b_{r5} + 4!\, b_{r4} + 4\cdot 3b_{r3} + 4b_{r2} + b_{r1} = 5^{r-1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(r-2)!\, b_{r,\,r-1} + (r-2)!\, b_{r,\,r-2} + D_{r-2,\,r-4}b_{r,\,r-3} + \ldots + D_{r-2,\,2}b_{r3} +\\
&\qquad + D_{r-2,\,1}b_{r2} + b_{r1} = (r-1)^{r-1}\\
&(r-1)!\, b_{rr} + (r-1)!\, b_{r,\,r-1} + D_{r-1,\,r-3}b_{r,\,r-2} + \ldots + D_{r-1,\,2}b_{r3} +\\
&\qquad + D_{r-1}b_{r2} + b_{r1} = r^{r-1}
\end{aligned}\right.
$$

che consta di r equazioni lineari in altrettante incognite, con determinante differente da zero; otterremo così i valori delle b, il che intanto ci fa concludere che la decomposizione (2) è sempre possibile ed in un modo solo.

Risolvendo, dalle (4) si ha

$$
\left\{
\begin{aligned}
&b_{r1} = 1^{r-1}\\
&1!\, b_{r2} = 2^{r-1} - 1\\
&2!\, b_{r3} = 3^{r-1} - 2\cdot 2^{r-1} + 1\\
&3!\, b_{r4} = 4^{r-1} - 3\cdot 3^{r-1} + 3\cdot 2^{r-1} - 1\\
&4!\, b_{r5} = 5^{r-1} - 4\cdot 4^{r-1} + 6\cdot 3^{r-1} - 4\cdot 2^{r-1} + 1\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(r-1)!\, b_{rr} = r^{r-1} - \binom{r-1}{1}(r-1)^{r-1} + \binom{r-1}{2}(r-2)^{r-1} - + \ldots +\\
&\qquad + (-1)^{r-2}\binom{r-1}{r-2}2^{r-1} + (-1)^{r-1}
\end{aligned}\right.
$$

cioè in generale

$$(k-1)!\, b_{rk} = \sum_{0}^{k-1}{}_{\beta}(-1)^{\beta}\binom{k-1}{\beta}(k-\beta)^{r-1}$$

e prendo $k - \beta = \alpha$:

$$(k-1)!\, b_{rk} = \frac{(-1)^k}{k}\sum_{1}^{k}{}_{\alpha}(-1)^{\alpha}\binom{k}{\alpha}\alpha^{r}$$

cioè anche

$$(5)\qquad k!\, b_{rk} = (-1)^k f(k, r)$$

dove si è posto per brevità

$$(6)\qquad f(kr) = \sum_{1}^{k}{}_{\alpha}(-1)^{\alpha}\binom{\alpha}{k}\alpha^{r}.$$

Dalle (5) e (6) si verifica subito la formula ricorrente

$$b_{rk} = kb_{r-1,\,k} + b_{r-1,\,k-1} \tag{7}$$

cioè i nostri cofficienti b coincidano con le a_{rk} del prof. SCHWATT, il chè è interessante tenendo presente il significato delle a_{rk} [1].

Dopo ciò riprendiamo la nostra serie e spezziamola come segue:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{n^r}{n!} = \sum_{1}^{r} \frac{n^r}{n!} + \sum_{n+1}^{\infty} \frac{n^r}{n!} = 1 + 2^{r-1} + \frac{3^{r-1}}{2!} + \dots +$$

$$+ \frac{r^{r-1}}{(r-1)!} + \sum_{r+1}^{\infty} \left\{ \frac{b_{r1}}{(n-1)!} + \frac{b_{r2}}{(n-2)!} + \dots + \frac{b_{rr}}{n-r)!} \right\}.$$

Ma si ha

$$\sum_{r+1}^{\infty}{}_n \frac{b_{r1}}{(n-1)!} = b_{r1} \left\{ e - 1 - 1 - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{(r-2)!} - \frac{1}{(r-1)!} \right\}$$

$$\sum_{r+1}^{\infty}{}_n \frac{b_{r2}}{(n-2)!} = b_{r2} \left\{ e - 1 - 1 - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{(r-2)!} \right\}$$

$$\sum_{r+1}^{\infty}{}_n \frac{b_{r,r-1}}{(n-r+1)!} = b_{r,r-1} \{ e - 1 - 1 \}; \quad \sum_{r+1}^{\infty}{}_n \frac{b_{rr}}{(n-r)!} = b_{rr}(e-1),$$

[1] Poichè le b_{rk} sono intere, come risulta subito osservando che sono intere b_{r1}, b_{r2} e tenendo conto della (7), ne segue dalla (5), che $f(kr)$ è divisibile per $k!$ È interessante, sulle $f(kr)$ osservare che si ottiene facilmente la formula ricorrente

$$f(k,\, r) = kf(k,\, r-1) - kf(k-1,\, r-1)$$

e quindi che, procedendo per induzione risulta $f(k,\, r) = 0$ per $r < k$ e $f(kk) = (-1)^k k!$ Che le b_{rk} siano intere, indipendentemente dalla (7), si può dedurre come segue: poichè $b_{r1} = 1$, $b_{r2} = 2^{r-1} - 1$, ne segue da $n^{r-1} = \sum_{1k}^{r} D_{n-1,\,k-1} b_{kr}$, che è intera l'espressione

$$(n-1) \{ b_{r2} + (n-2)b_{r3} + (n-2)(n-3)b_{r4} + \dots + (n-2(n-3)\dots-(n-r+1)b_{rr} \}$$

e quindi la quantità entro parentesi o è intera o continua al massimo $n-1$) al denominatore; ma questa seconda ipotesi va esclusa perchè per $n = 1$ l'espressione stessa resta finita; allora ne segue che è intera anche l'espressione

$$(n-2) \{ b_{r3} + (n-3)b_{r4} + \dots + (n-r)\dots-(n-r+1)b_{rr} \}$$

e ripetendo il ragionamento, risulta che è intera l'espressione entro parentesi; facendo $n = 3$ si ottiene allora che anche b_{r3} è intera e così continuando segue l'asserto.

e quindi, eseguendo la somma, ed ordinando, avremo

$$\sum_1^\infty \frac{n^r}{n!} = e(b_{r_1} + \dots + b_{rr}) + 1^{r-1} - (b_{r_1} + \dots + b_{rr}) + 2^{r-1} - (b_{r_1} + \dots + b_{r,r-1}) + \frac{3^{r-1} - (b_{r_1} + \dots + b_{r_1,r-2})}{2!} + \frac{4^{r-1} - (b_{r_1} + \dots + b_{r_1,r-3})}{3!} + \dots + \frac{(r-1)^{r-1} - (b_{r_1} + b_{r_2})}{(r-2)!} + \frac{r^{r-1} - b_{r_1}}{(r-1)!}.$$

Ma dalle (4) risulta

$$\begin{cases} b_{r_1} = 1^{r-1}, \quad b_{r_2} + b_{r_1} = 2^{r-1}, \quad b_{r_3} + b_{r_2} + \dfrac{b_{r_1}}{2!} = \dfrac{3^{r-1}}{2!} \\ b_{rr} + b_{r,r-1} + \dfrac{b_{r,r-2}}{2!} + \dfrac{b_{r,r-3}}{3!} + \dots + \dfrac{b_{r,1}}{(r-1)!} = \dfrac{r^{r-1}}{(r-1)!} \end{cases}$$

e quindi, semplicemente

$$\sum_1^\infty \frac{n^r}{n!} = (b_{r_1} + b_{r_2} + \dots + b_{rr})e.$$

Ponendo, per brevità

$$\sum_{1}^{r}{}_{k}\, b_{rk} = b_r$$

risulta infine

$$\sum_1^\infty \frac{n^r}{n!} = b_r \cdot e$$

dove b_r è un numero intero che si sa calcolare elementarmente.

Per i primi valori di r, si ha:

$$\begin{aligned}
b_1 &= 1 && = 1 \\
b_2 &= 1 + 1 && = 2 \\
b_3 &= 1 + 3 + 1 && = 5 \\
b_4 &= 1 + 7 + 6 + 1 && = 15 \\
b_5 &= 1 + 15 + 25 + 10 + 1 && = 52 \\
b_6 &= 1 + 31 + 90 + 65 + 15 + 1 && = 203 \\
b_7 &= 1 + 63 + 301 + 350 + 140 + 21 + 1 && = 877
\end{aligned}$$

$$b_8 = 4138, \quad b_9 = 22147, \quad b_{10} = 115975$$

da cui risulta come i numeri b vadano rapidamente crescendo.