Bollettino Unione Matematica Italiana

Editta Pini

Ancora sulle equazioni integrali del tipo $f(x) = \varphi(x) - \int_0^x [a(x) - a(y)]\varphi(y)\, dy$

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.3, p. 139–140.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_3_139_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1931.

Ancora sulle equazioni integrali del tipo

$$f(x) = \varphi(x) - \int_0^x [a(x) - a(y)]\varphi(y)dy.$$

Nota di EDITTA PINI (a Bologna).

Sunto. - *L'A. estende il risultato di una sua Nota precedente al caso in cui* $a'(0) = 0$.

1. In una Nota precedente (¹) ho osservato che la funzione $\varphi(x)$ soddisfacente alle equazioni integrali

$$(1) \qquad f(x) = \varphi(x) - \int_0^x [a(x) - a(y)]\varphi(y)dy$$

soddisfa anche alle relazioni:

$$(2) \qquad f(x) = \left[\frac{z'}{a'}\right]' - z$$

$$(3) \qquad z(0) = z'(0) = 0$$

dove

$$(4) \qquad z = \varphi(x) - f(x).$$

Nel procedimento usato si è implicitamente supposto che, in tutto l'intervallo di variabilità della x, sia $a(x)$ derivabile quanto occorre e $a'(x) \neq 0$ e si è concluso che l'unica soluzione della (2), soddisfacente alle condizioni (3), fornisce, mediante la (4), la soluzione $\varphi(x)$ della (1).

Può essere interessante considerare il caso in cui $a'(0) = 0$. Allo scopo, ponendo, come allora,

$$(5) \qquad \psi(x) = \int_0^x \varphi(y)dy$$

$$(6) \qquad z = \int_0^x \psi(y)a'(y)dy$$

e quindi

$$\psi'(x) = \varphi(x), \quad z' = \psi(x)a'(x);$$

derivando due volte la (6) e moltiplicando poi per $a'(x)$ si ottiene:

$$a'z'' = a'^2\varphi(x) + a''z',$$

(¹) Questo « Bollettino », anno X, n. 2, Aprile 1931.

cioè, per la (4):

(7) $$a'z'' - a''z' - a'^2 z = f \cdot a'^2,$$

equazione che corrisponde sostanzialmente alla (2).

D'altra parte, dalla (6), risulta $z(0) = 0$, e dalla (5), $\psi(0) = 0$; pertanto dovrà essere:

$$\lim_{x \to 0} \psi(x) = \lim_{x \to 0} \frac{z'(x)}{a'(x)} = 0.$$

Inversamente si verifica in modo agevole che la soluzione z della (7) definita dalle condizioni iniziali:

(3') $$z(0) = 0, \quad \lim_{x \to 0} \frac{z'(x)}{a'(x)} = 0$$

è tale che

$$\varphi(x) = f(x) + z$$

è soluzione della (1).

(Ovviamente, se $a'(0) \neq 0$, il procedimento indicato non differisce da quello contenuto nelle (2), (3), (4)).

2. Se, ad esempio, è proposto di risolvere l'equazione integrale

(8) $$-x^2 = \varphi(x) - \int_0^x (x^2 - y^2)\varphi(y)dy,$$

si può subito osservare che essa rientra nella classe considerata ove si faccia $f(x) = -x^2$, $a(x) = x^2$. Essendo in questo caso $a'(0) = 0$ si dovrà usare la (7) che si scrive:

$$xz'' - z' - 2x^3 z = -2x^4.$$

Integrando per serie questa equazione, sotto le condizioni iniziali (3'), si trova che essa è soddisfatta dall'unica funzione

$$z = -\frac{2}{15} \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{3n+2},$$

dove $c_1 = 1$ e per $n > 1$

$$c_n = \frac{2^{n-1}}{\prod_2^n 3r(3r+2)},$$

e pertanto

$$\varphi(x) = -x^2 - \frac{2}{15} \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{3n+2}$$

soddisfa all'equazione integrale (8).