BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

GIUSEPPE SCORZA DRAGONI

Il moto dei gravi in un mezzo resistente

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.3, p. 141–149.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_3_141_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1931.

Il moto dei gravi in un mezzo resistente.

Nota di GIUSEPPE SCORZA-DRAGONI (a Napoli).

Sunto - *Questa Nota contiene uno studio qualitativo delle traiettorie di un punto soggetto alla gravità e ad una forza resistente.*

In questa Nota espongo uno studio qualitativo sulle soluzioni del problema principale della balistica esterna (1): determinare la traiettoria di un punto mobile in un mezzo resistente e immerso in un campo gravitazionale costante.

I teoremi che seguono mi sono stati suggeriti da alcuni risultati, resi noti dal prof. PICONE solo di recente (2), ma che rimontano a una ricerca già condotta a termine durante la guerra. Ispirandomi a questi risultati, ho tentato ampliarne il campo di validità, e così ne ho ottenuto delle estensioni che lasciano alla resistenza offerta dal mezzo una libertà quasi assoluta (3).

Basta che per la grandezza di questa resistenza si abbia la continuità rispetto agli argomenti da cui dipende, la convergenza uniforme verso una costante (o una funzione) minor di g (4) al tendere a zero della velocità del punto, perchè le traiettorie presentino le proprietà regolari classiche. In particolare esse son sempre dotate di tangente e l'intervallo di tempo, in cui è possibile definirne le equazioni parametriche, va sempre da un istante iniziale a infinito.

Infine, in una cerchia leggermente più ristretta, dò anche dei teoremi sul comportamento asintotico della velocità.

1. Un punto P soggetto alla forza di gravità, supposta costante in direzione e verso, e mobile in un mezzo che offra una resistenza di senso contrario alla velocità di P, quando velocità e resistenza siano entrambe diverse da zero, si sposta mantenendosi in uno stesso piano verticale.

Sia allora xy una coppia di assi cartesiani di questo piano,

(1) Cfr. p. es., LEVI-CIVITA e AMALDI, *Lezioni di Meccanica razionale*, Zanichelli, vol. II, parte I, cap. II.

(2) PICONE, *Sul moto dei gravi nell'atmosfera*; questo « Bollettino », aprile-giugno 1930.

(3) Il progresso segnato dalla mia sulle ricerche precedenti si è che io non avrò alcun bisogno di paragonare l'ordine di infinitesimo della resistenza con la velocità infinitesima.

(4) Naturalmente g è l'accelerazione di gravità.

x riuscendo orizzontale, y verticale e rivolto verso l'alto, la posizione di P all'origine dei tempi dandoci l'origine delle coordinate.

Supporremo la resistenza $F(t, x, y, x', y')$ offerta dal mezzo funzione continua e mai negativa del tempo e della posizione e delle componenti della velocità del punto, definita per tutti i valori delle variabili da cui dipende. Sarà inoltre $F(t, x, y, 0, 0) = 0$ e, quando x ed y si mantengono minori in valor assoluto di un numero positivo arbitrario q, la relazione

$$(1) \qquad \lim_{v \to 0} F(t, x, y, x', y') = 0, \qquad (v = \sqrt{x'^2 + y'^2}),$$

sarà soddisfatta in modo uniforme nell'insieme $-\infty < t < +\infty$, $|x| \leq q$, $|y| \leq q$ [1].

2. Le componenti iniziali della velocità di P siano entrambe positive; per un certo intervallo di tempo $(0 \leq t < t_0)$ il punto ascenderà con velocità $v(t)$ sempre positiva lungo una curva di inclinazione $\vartheta(t)$ [2] sempre positiva.

La velocità di P essendo diversa da zero in tutto l'intervallo $0 \leq t < t_0$, nello stesso intervallo $v(t)$ e $\vartheta(t)$ sono astrette alle equazioni

$$(2) \qquad \begin{cases} v' = -F(t, x, y, x', y') - g \operatorname{sen} \vartheta, & \vartheta' = -g \dfrac{\cos \vartheta}{v}. \\ x' = v \cos \vartheta, \quad y' = v \operatorname{sen} \vartheta \end{cases}$$

dove g è l'accelerazione di gravità.

Poichè $v(t)$ e $\vartheta(t)$ sono positive in $0 \leq t < t_0$, le loro derivate prime vi saranno minori di zero, ed esse, decrescenti e quindi *limitate* e *convergenti* verso due limiti: $v(t_0)$, $\vartheta(t_0)$.

Allora, se $t_0 < +\infty$, esistono anche i limiti

$$x_0' = \lim_{t \to t_0} x'(t) = v(t_0) \cos \vartheta(t_0), \quad y_0' = \lim_{t \to t_0} y'(t) = v(t_0) \operatorname{sen} \vartheta(t_0),$$

$$x_0 = \lim_{t \to t_0} x(t) = x'(0) + \int_0^{t_0} v \cos \vartheta dt, \quad y_0 = \lim_{t \to t_0} y(t) = y'(0) + \int_0^{t_0} v \operatorname{sen} \vartheta dt;$$

[1] Più generalmente si può supporre soddisfatta in modo uniforme la relazione $\lim_{v \to 0} F(t, x, y, x', y') = F(t, x, y, 0, 0)$ in ogni insieme del tipo $-\infty < t < +\infty$, $|x| \leq q$, $|y| \leq q$. Allora in ciascheduno di questi insiemi dovrà essere $F(t, x, y, 0, 0) | \leq k$, con $k < g$ (g è il valor dell'accelerazione di gravità) e dipendente solo da q.

[2] $\vartheta(t)$ è la misura dell'angolo formato dall'asse x e dall'asse che ha per sostegno la tangente alla traiettoria nella posizione occupata da P all'istante t e per verso positivo il verso del vettore velocità; $\vartheta(t)$ è determinata se $v(t)$ è > 0. Quando $\vartheta(t)$ non è nulla, il suo segno sarà quello di $y'(t)$.

e, se $v(t_0)$ è maggior di zero, $v(t)$ e $\vartheta(t)$ si possono prolungare oltre il punto t_0 (1), il punto $(t_0, x_0, y_0, x_0', y_0')$ risultando interno all'insieme di regolarità del sistema (2). Così proseguendo, si perviene conservando $v(t)$ e $\vartheta(t)$ sempre positive ad un eventuale istante $t_1 < +\infty$ per cui sia

(3) $$\lim_{t\to t_1} v(t) = 0, \quad \lim_{t\to t_1} \vartheta(t) \geq 0,$$

oppure

(4) $$\lim_{t\to t_1} v(t) > 0, \quad \lim_{t\to t_1} \vartheta(t) = 0;$$

ovvero è $t_1 = +\infty$ e in ogni momento si ha

(5) $$v(t) > 0, \quad \vartheta(t) > 0,$$

riuscendo in ogni caso soddisfatte le (2) nell'intervallo $0 \leq t < t_1$.

Indicando con V, V_x, V_y e φ i valori iniziali di v, x', y', e ϑ, (di guisa che φ è positivo e minor di $\frac{\pi}{2}$, poichè per ipotesi V_x e V_y sono maggior di zero), dovrà essere

$$0 \leq \lim_{t\to t_1} \vartheta(t) = \varphi - \lim_{t\to t_1} \int_0^t g \frac{\cos\vartheta}{v}\, dt < \varphi;$$

e l'integrale $\int_0^t g \frac{\cos\vartheta}{v}\, dt$ avrà un limite finito per $t \to t_1$.

Questa circostanza esclude senz'altro le (3) e le (5). Infatti, se sono verificate le (5) in ogni istante da zero a $+\infty$, $v(t)$ e $\vartheta(t)$ sono decrescenti e minori di V e φ in ogni punto della traiettoria; ne segue $\frac{\cos\vartheta}{v} > \frac{\cos\varphi}{V} > 0$, e l'integrale scritto per $t \to t_1 = +\infty$ ha come limite $+\infty$. Se sono verificate le (3), abbiamo $v(t)$ e $\vartheta(t)$ decrescenti e limitate per t compreso fra t_1 e lo zero; e limitate con esse $x(t)$, $y(t)$, $x'(t)$, $y'(t)$. Ne segue che anche i valori di F lungo la traiettoria per t compreso fra 0 e t_1 descrivano un insieme limitato di numeri positivi: ne sia p l'estremo superiore. In base alla prima delle (2) si ricava

$$\lim_{t\to t_1} \int_0^t g \frac{\cos\vartheta}{v}\, dt = \lim_{v\to 0} \int_V^v \frac{g\cos\vartheta(v)}{-v(F+g\,\mathrm{sen}\,\vartheta(v))}\, dv =$$

$$= \lim_{v\to 0} \int_v^V \frac{g\cos\vartheta}{v(F+g\,\mathrm{sen}\,\vartheta)}\, dv \geq \frac{g\cos\varphi}{p+g} \lim_{v\to 0} \int_v^V \frac{dv}{v} = +\infty.$$

(1) A causa della generalità lasciata alla F per puro interesse analitico, questo prolungamento potrà anche farsi in più modi.

Con questo siamo riusciti a dimostrare che a un certo momento t_1 il punto ha ancora una velocità positiva, quando la sua traiettoria ha già la tangente orizzontale; le soluzioni del sistema (2) si possono prolungare a destra di t_1.

3. Ci sarà facile mostrare che

A partire da questo momento la velocità di P *non si potrà più annullare; l'inclinazione si manterrà negativa, decrescente e* $> -\frac{\pi}{2}$; P *si muoverà indefinitamente, indefinitamente abbassandosi.*

Consideriamo un qualunque prolungamento della nostra soluzione oltre il punto t_1; e sia $t_2 < +\infty$ e $> t_1$ un istante tale, che in tutto l'intervallo $t_1 \leq t < t_2$ la velocità di P lungo la traiettoria che si considera si mantenga diversa da zero, e quindi positiva. Lungo questa traiettoria fra $\vartheta(t)$ e $\vartheta'(t)$ passa la relazione $\vartheta'(t) = -g\frac{\cos\vartheta(t)}{v(t)}$; cioè $\vartheta(t)$ è integrale di un'equazione differenziale $\vartheta' = -g\frac{\cos\vartheta}{v(t)}$, che involge solo ϑ e t e che verifica la condizione di LIPSCHITZ rispetto a ϑ. Allora se in un certo istante t_3, compreso fra t_1 e t_2, fosse $\vartheta(t_3) = -\frac{\pi}{2}$, in tutto l'intervallo $t_1 \leq t < t_2$ sarebbe sempre $\vartheta(t) = -\frac{\pi}{2}$, poichè questa costante è l'unico integrale della $\vartheta' = -g\frac{\cos\vartheta}{v(t)}$ che per $t = t_3$ si riduca a $-\frac{\pi}{2}$ [1]. Ma questo è assurdo: quindi:

Qualunque sia la traiettoria che si considera, nell'intervallo $t_1 \leq t < t_2$ *è* $-\frac{\pi}{2} < \vartheta(t)$, *se in questo stesso intervallo è* $v(t) > 0$;

ed allora la seconda delle (2) ci dà senz'altro che $\vartheta(t)$ è una funzione decrescente nell'intervallo indicato: e da $\vartheta(t_1) = 0$ segue anche che

Nello stesso intervallo è sempre $\vartheta(t) < 0$.

Sia ancora $t_2 < +\infty$ un istante tale che in tutto l'intervallo $t_1 \leq t < t_2$ la velocità del punto P si mantenga diversa da zero. In questo intervallo sono equazioni del moto di P anche le

$$x'' = -F\cos\vartheta,\quad y'' = -g - F\,\mathrm{sen}\,\vartheta, \tag{6}$$

[1] Si rammenti che $\vartheta' = -g\frac{\cos\vartheta}{v(t)}$ soddisfa alla condizione di LIPSCHITZ.

mentre da $-\frac{\pi}{2} < \vartheta(t) \leq 0$ si ha:

$$\operatorname{sen} \vartheta \leq 0, \quad x' = v \cos \vartheta > 0, \quad y' = v \operatorname{sen} \vartheta \leq 0.$$

Le equazioni scritte dicono che x' è decrescente e positiva e quindi limitata, y' negativa e non minore di $y'(t_1) - g(t_2 - t_1)$ e quindi ancora limitata nell'intervallo $t_1 \leq t < t_2$. Insieme con le derivate prime e la $v(t)$ saranno limitate in questo intervallo anche la $x(t)$ e la $y(t)$ e quindi la funzione $F(t, x(t), \ldots)$; allora, risalendo dalle (6) alle funzioni primitive a mezzo di successive integrazioni, si ha che esistono e sono finiti per $t \to t_2$ i limiti di $x(t)$, $y(t)$, $x'(t)$, $y'(t)$ e $v(t)$.

Orbene, il limite di $v(t)$ è sempre diverso da zero; perchè altrimenti, essendo $x(t)$ e $y(t)$ limitate in $t_1 \leq t < t_2$, in base alla (1) il limite di $F(t, x(t), \ldots)$ per $t \to t_2$ sarebbe lo zero, e dalla prima delle (2) e da $\vartheta(t)$ decrescente, $> -\frac{\pi}{2}$ e ≤ 0 per $t > t_1$, verrebbe

$$\lim_{t \to t_2} v'(t) = -g \operatorname{sen} \lim_{t \to t_2} \vartheta(t) > 0;$$

il che è assurdo, non potendo la funzione positiva $v(t)$ annullarsi per $t \to t_2$, avendo a sinistra di t_2 una derivata positiva [1].

Dall'esistenza dei limiti di $x(t)$, $y(t)$, $x'(t)$, $y'(t)$, $v(t)$ per $t \to t_2$, e dall'essere il limite di $v(t)$ diverso da zero segue che la soluzione del sistema (2) si può prolungare al di là di t_2; e quindi si può definire in tutta la semiretta dei tempi positivi, avendosi sempre $v(t) > 0$ [2].

Unendo questo al risultato già ottenuto si riconosce subito che tutte le asserzioni fatte, meno l'ultima, sono giustificate.

Dimostriamo ora che al crescere indefinito del tempo la quota di P diminuisce indefinitamente.

(1) Se si fa l'ipotesi indicata nella nota a piè di pagina relativa alla (1), ricorrendo al limite

$$\lim_{t \to t_2} \vartheta(t) = \lim_{t \to t_2} \int_{t_1}^{t} -g \frac{\cos \vartheta}{v}\, dt,$$

si dimostra che se $v(t)$ si annulla per $t \to t_2$, il limite scritto è $-\frac{\pi}{2}$; allora passando al limite nella (2) si ha

$$\lim_{t \to t_2} v'(t) = -\lim_{t \to t_2} F(t, x(t), y(t), 0, 0) + g > 0, \ldots$$

(2) Se così non fosse, detto t_2 il punto oltre il quale la soluzione non si può prolungare, o il primo punto in cui $v(t)$ si annulla, si cadrebbe subito in un assurdo.

Da $y'(t) = v \operatorname{sen} \vartheta \leq 0$ per $t > t_1$ segue che $y(t)$ è decrescente per $t > t_1$, e quindi che esiste il limite $\bar{y} = \lim\limits_{t \to \infty} y(t) < +\infty$ e che è $y(t) > \bar{y}$, se $t > t_1$. Se $\bar{y}$ non è $-\infty$, esiste finito l'integrale

$$\int_{t_3}^{+\infty} y'(t)dt, \tag{7}$$

dove t_3 è un qualsiasi istante posteriore a t_1.

Dalle ultime delle (2) abbiamo

$$0 \leq x'(t) = y'(t) \operatorname{cotg} \vartheta(t) \quad \text{in} \quad t_3 \leq t < +\infty,$$

e quindi $x'(t) \leq y'(t) \operatorname{cotg} \vartheta(t_3)$, poichè $y'(t)$ è negativa e $\operatorname{cotg} \vartheta(t)$ è negativa anch'essa e decresce in valor assoluto col crescere del tempo. Ma allora esiste il limite

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{t_3}^{t} x'(t)dt \leq \operatorname{cotg} \vartheta(t_3) \int_{t_3}^{\infty} y'(t)dt < +\infty,$$

ed è

$$0 < \lim_{t \to +\infty} x(t) = \bar{x} = x(t_3) + \int_{t_3}^{+\infty} x'(t)dt < +\infty.$$

Quindi $x(t)$ e $y(t)$ sono limitate e non solo all'infinito, ma in tutta la semiretta dei tempi positivi. Diciamo q un numero tale che sia $|x(t)| < q$, $|y(t)| < q$; e v_0 un numero tale che sia $v_0 < v(t_3)$ e che si abbia $-F(t, x, y, x', y') - g \operatorname{sen} \vartheta(t_3) > 0$, quando x e y sono minori di q in valore assoluto e $|\sqrt{x'^2 + y'^2}|$ è minore di v_0, oppure eguale a v_0.

Allora io dico che anche a destra di t_3 è sempre $v(t) > v_0$.

Infatti se così non fosse, esisterebbe un primo punto $t_4 > t_3$ in cui sarebbe $v(t_4) = v_0$. E in t_4 avremmo

$$\begin{aligned} v'(t_4) &= -F(t_4, x(t_4), \ldots) - g \operatorname{sen} \vartheta(t_4) \geq \\ &\geq -F(t_4, x(t_4), \ldots) - g \operatorname{sen} \vartheta(t_3) > 0 \ [1] \end{aligned}$$

e, a sinistra di t_4, $v(t) > v_0$; e questo è impossibile.

Indi è

$$\begin{aligned} v_0^2 < v^2(t) &= x'^2(t) + y'^2(t) = \\ &= y'^2(t)[1 + \operatorname{cotg}^2 \vartheta(t)] < y'^2(t)[1 + \operatorname{cotg}^2 \vartheta(t_3)], \qquad (t \geq t_3), \end{aligned}$$

cioè

$$y'^2(t) > \frac{v_0^2}{1 + \operatorname{cotg}^2 \vartheta(t_3)} > 0, \qquad (t \geq t_3);$$

[1] Si tenga presente che è $-\frac{\pi}{2} < \theta(t_4) \leq \theta(t_3) < 0$.

il che, insieme alla $y'(t) < 0$ negli istanti posteriori a t_3, non è compatibile con la esistenza dell'integrale (7). L'assurdo a cui siamo pervenuti mostra che $\bar{y}$ è $-\infty$ [1].

4. Restringiamo ancora un po' la libertà concessa alla F. Supponiamo la F uniformente infinitesima con $x'^2 + y'^2$ per t, x ed y variabili da $-\infty$ a $+\infty$; e crescente all'infinito in modo uniforme per v crescente all'infinito.

Anzi, poichè qualunque siano i dati iniziali, il punto P da un certo momento in poi è estremamente al di sotto dell'orizzonte, possiamo supporre queste ultime due proprietà possedute dalla F solo per t, x e y variabili nell'insieme

$$-\infty < t < +\infty, \quad -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y \leq \text{cost} = h \text{ [2]};$$

di guisa che la F potrà, p. es., diminuire anche in modo notevole coll'aumentar della quota, come accade nell'atmosfera.

Sia v_1 un numero tale, che per $|\sqrt{x'^2 + y'^2}| \geq v_1$, l'estremo superiore di $g - F(t, x, y, x', y')$ calcolato facendo variare t e x da $-\infty$ a $+\infty$ e conservando y minore di h, sia negativo. Sia w_1 l'estremo inferiore di tutti questi v_1 [3]. Io dico che

La velocità $\mathrm{v(t)}$ *per* $\mathrm{t} \to +\infty$ *finisce coll'essere sempre minore di un qualunque* $\mathrm{v_1 > w_1}$; *e che* $\vartheta(\mathrm{t})$ *tende decrescendo a* $-\frac{\pi}{2}$ *quando* t *tende a* $+\infty$.

(1) Anche la dimostrazione di questo teorema comporta un giro più lungo se si fa l'ipotesi, di cui nella nota a piè del n. 1.

Allora dall'esistenza dei due integrali

$$\int_0^{+\infty} y'dt = \int_0^{+\infty} v \operatorname{sen} \vartheta dt \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} \vartheta' dt = \int_0^{+\infty} -g\frac{\cos\vartheta}{v} dt$$

si dedurrà $\lim_{t\to+\infty} \vartheta = -\frac{\pi}{2}$ (perchè in caso contrario la misura dell'insieme in cui è $v(t) > 1$ deve esser finita perchè esista il primo integrale, infinita perchè esista il secondo); e t_3 sarà un istante successivo a t_1 per cui sia $-k - g \operatorname{sen} \vartheta(t_3) > 0$, se k è l'estremo superiore di $F(t, x, y, 0, 0)$ nell'insieme $-\infty < t < +\infty$, $|x| \leq q$, $|y| \leq q$; ecc.

(2) In questo caso le ipotesi parallele a quella fatta nella nota a piè di pagina relativa alla (1) sono: $F(t, x, y, 0, 0) < \text{cost.} < g$ e soddisfatta uniformemente la $\lim_{v\to 0} F(t, x, y, x', y') = F(t, x, y, 0, 0)$ nell'insieme

$$-\infty < t < +\infty, \quad -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y \leq h.$$

(3) Si noti che numeri quali v_1 ne esistono effettivamente, date le nostre ipotesi. Del pari si osserverà che esistono numeri che verifichino le condizioni indicate al n. 5.

Supponiamo che si possa determinare un istante $\bar{t}(\geq 0)$ in modo che in tutti quelli successivi si abbia, oltre alla $y(t) \leq h$, — il che è sempre possibile ottenere scegliendo $\bar{t}$ sufficientemente grande — anche la

(8) $$v(t) \geq v_1 > w_1;$$

allora facendo tendere t a $+\infty$ nella prima delle (2) si ha

$$v'(t) = -g \operatorname{sen} \vartheta(t) - F \leq g - F \leq \text{cost} < 0.$$

E questo è in contraddizione con la (8).

Quindi esiste un $\bar{t}_1$, per cui è $v(\bar{t}_1) < v_1$, oltre alla $y(t) \leq h$ per tutti gli istanti posteriori. Allora è evidente che da questo momento $v(t)$ si conserva minor di v_1. Infatti, se $\bar{t}_2$ fosse il primo punto oltre $\bar{t}_1$ in cui $v(t)$ è uguale a v_1, avremmo $v(t) < v(\bar{t}_2)$ in un intorno sinistro di $\bar{t}_2$ e $v'(\bar{t}_2) = -g \operatorname{sen} \vartheta(\bar{t}_2) - F \leq g - F < 0$. il che è assurdo.

Fermo questo, poichè il limite

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{\bar{t}_1}^{t} -g \frac{\cos \vartheta}{v} dt = \lim_{t \to +\infty} \vartheta(t)$$

è finito, e poichè per t sufficientemente grande (e quindi per ogni t), la funzione positiva $v(t)$ è limitata superiormente ([1]), $\cos \vartheta(t)$ deve annullarsi all'infinito, e $\vartheta(t)$ dovrà avvicinarsi indefinitamente a $-\frac{\pi}{2}$ per t infinitamente grande.

5. Sia v_2 un numero positivo tale che l'estremo inferiore di $g - F(t, x, y, x', y')$ sia positivo nell'insieme

$$-\infty < t < +\infty, \quad -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y \leq h,$$
$$0 \leq \sqrt{x'^2 + y'^2} \leq v_2.$$

Sia w_2 l'estremo superiore di questi v_2. Allora

La velocità del punto P *per* $t \to +\infty$ *finisce coll'esser sempre superiore a qualsiasi* $v_2 < w_2$.

Sarà quindi evidente che w_2 non supera w_1.

Sia k l'estremo inferiore della funzione $g - F$ nell'insieme

$$-\infty < t < +\infty, \quad -\infty < x < +\infty, \quad y \leq h, \quad 0 \leq \sqrt{x'^2 + y'^2} \leq v_2;$$

k sarà positivo.

Allora, se $\bar{t}$ è sufficientemente grande perchè in tutti gli istanti

([1]) Cfr. Signorini, *Sulla velocità minima*, « Rendiconti dei Lincei », serie VI, 1922.

successivi sia $y(t) \leq h$ e $-g \operatorname{sen} \vartheta(t) \geq g - \frac{k}{2}$ [1], tutte le volte che per $t \geq \bar{t}$ è $v(t) \leq v_2$, sarà anche

$$v'(t) = -g \operatorname{sen} \vartheta - F(t, x(t), \ldots) \geq g - \frac{k}{2} - F \geq \frac{k}{2} > 0. \tag{9}$$

E di qui si ha senz'altro che a destra di $\bar{t}$ esiste almeno un t_1 in cui $v(t)$ è maggiore di v_2. Questo accade in tutti gli istanti successivi a t_1.

Infatti se $t_2 (> t_1)$ è il primo di questi in cui riesca $v(t_2) = v_2$, a sinistra di t_2 si avrebbe, almeno in un intorno, $v(t) > v_2$ e, per la (9), $v'(t_2) > 0$, il che è assurdo [2].

Dal teorema dimostrato segue che

La velocità di P *ha sempre un estremo inferiore positivo* [3].

6. Evidentemente la definizione data di w_1 e w_2 conduce a due numeri ben determinati, se vi si sostituisce h con un numero z minore di h; e questi due numeri si possono sostituire a w_1 e w_2 in tutte le considerazioni svolte. Nella semiretta $z \leq h$ risultano così definite due funzioni $w_1(z)$ e $w_2(z)$ decrescente l'una crescente l'altra; è $w_1(z) \geq w_2(z)$; quindi sono finiti i limiti

$$\overline{w}_2 = \lim_{z \to -\infty} w_2(z) \leq \lim_{z \to -\infty} w_1(z) = \overline{w}_1.$$

E la velocità $v(t)$ di P sarà definitivamente compresa nell'intervallo $\overline{w}_2 - \varepsilon \leq v \leq \overline{w}_1 + \varepsilon$, qualunque sia il numero positivo ε. Se $\overline{w}_1$ e $\overline{w}_2$ sono eguali, detto w il numero da essi rappresentato,

La velocità di P *all'infinito è uguale a* w.

Questo accade, p. es., quando la resistenza $F(v)$ è funzione della sola velocità, nulla per $v = 0$ crescente e crescente all'infinito; oppure quando è della forma $\delta(y) f(v)$ [4], ed $f(v)$ soddisfa alle condizioni indicate per $F(v)$ e $\delta(y)$ è limitata, sempre positiva e tende a un limite maggiore di zero per $y \to -\infty$.

(1) Si rammenti che $\vartheta(+\infty) = -\frac{\pi}{2}$.

(2) Questa dimostrazione vale anche nel caso più generale contemplato nella nota (1) a piè del n. 4.

(3) Questo teorema vale anche se la F è soltanto uniformemente infinitesima con v in tutto l'insieme $-\infty < t < +\infty$, $-\infty < x < +\infty$, $y \leq h$.

(4) Cfr. la Nota di PICONE già citata.