Bollettino Unione Matematica Italiana

Mauro Picone

Sul moto dei gravi in un mezzo resistente

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.3, p. 150–167.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_3_150_0>

RELAZIONI SCIENTIFICHE

Sul moto dei gravi in un mezzo resistente.

Il mio vecchio studio, dei tempi della guerra, sul moto dei gravi in un mezzo resistente, pubblicato l'anno scorso in questo « Bollettino » [1], ha suscitato l'elegante Nota del presente fascicolo del dott. G. SCORZA-DRAGONI [2] ed alcune sue osservazioni, comunicatemi verbalmente.

Queste e quella mi hanno indotto a ritornare sull'argomento e ne ho ricavato la presente nuova esposizione che apporta perfezionamenti che, per certi riguardi, ritengo definitivi, con l'indicazione di talune applicazioni.

Ponendomi, in primo luogo, nelle generalissime ipotesi sulla resistenza opposta dal mezzo contemplate dal dott. SCORZA-DRAGONI, ritrovo, col mio vecchio procedimento, i notevoli risultati da lui ottenuti. Questo procedimento ha forse il vantaggio di una maggiore semplicità, laddove può, come qui mostro, essere senz'altro applicato anche allo studio del moto sulla verticale. In secondo luogo, considerando ipotesi più particolari, apporto una correzione ai teoremi IV e VI della mia Nota citata, le cui dimostrazioni, come mi ha fatto osservare il dott. SCORZA-DRAGONI, sono insufficienti; pervenendo inoltre a nuovi risultati nella ricerca del minimo della velocità, alla quale già il SIACCI ebbe a dedicare un ampio ben noto lavoro [3].

Conservando le notazioni e convenzioni solite, per la funzione resistente $F(t, x, y, x', y')$ supporrò:

1°) ch'essa, definita per ogni sistema di valori delle variabili reali t, x, y, x', y', sia sempre finita e continua e sempre positiva quando sia $v^2 = x'^2 + y'^2 > 0$,

(1) M. PICONE, *Sul moto dei gravi nell'atmosfera*, questo « Bollettino », anno IX (1930). Citerò questa nota con la notazione (N')

(2) G. SCORZA-DRAGONI, *Il moto dei gravi in un mezzo resistente*, questo « Bollettino », anno X (1931). Citerò questa nota con la notazione (N'').

(3) F. SIACCI, *Sulla velocità minima*, « Rivista d'Artiglieria e Genio », vol. I e II (1901).

2°) l'esistenza di una funzione $\Phi(x, y, x', y')$, indipendente dal tempo, definita pur essa per quali si vogliano valori dei suoi argomenti, sempre finita e continua, tale che si abbia sempre

$$F(t, x, y, x', y') < \Phi(x, y, x', y') \tag{1}$$

$$\Phi(x, y, 0, 0) < g. \tag{2}$$

Le equazioni che, in funzione del tempo, verificano le coordinate x e y del punto grave P sono le seguenti:

$$\begin{cases} x'' \begin{cases} = -F\dfrac{x'}{v}, & \text{per } v > 0, \\ = 0, & \text{per } v = 0, \end{cases} \quad y'' \begin{cases} = -g - F\dfrac{y'}{v}, & \text{per } v > 0, \\ = -g, & \text{per } v = 0, \end{cases} \\ x(0) = y(0) = 0, \\ x'(0) = x_0', \quad y'(0) = y_0'. \end{cases} \tag{3}$$

1. La velocità iniziale ha non nulla la componente orizzontale. — Studieremo dapprima il moto di P supponendo che la velocità iniziale impressagli abbia positiva la componente orizzontale e ci limiteremo inoltre, ciò che basterà, a considerare le ipotesi

$$x_0' > 0, \quad y_0' > 0.$$

Sia $(0, \Lambda)$ $(\Lambda \leq +\infty)$ il massimo intervallo di tempo, *aperto a destra*, in cui è possibile definire una soluzione (x, y) delle (3), con la condizione

$$v > 0. \tag{4}$$

Dalle (3) si ricava, per t in $(0, \Lambda)$,

$$\frac{dx'^2}{dt} = -2F\frac{x'^2}{v}, \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}(y'^2 + 2gy) = -2F\frac{y'^2}{v}, \tag{6}$$

$$y''x' - x''y' = -gx', \tag{7}$$

$$y''(t) \leq -g, \quad \text{quando sia} \quad y'(t) \geq 0. \tag{8}$$

Dalla (5) segue [cfr. (N'), n. 1] che non possono presentarsi che i seguenti due casi: O è sempre $x'(t) > 0$ in $(0, \Lambda)$, oppure esiste ivi un punto λ per cui è $x'(\lambda) = 0$, riuscendo $x'(t) > 0$ per $0 \leq t < \lambda$, $x'(t) \equiv 0$ per $\lambda \leq t < \Lambda$. La (6) dice che $y'^2 + 2gy$ non è mai crescente; la (7) che la traiettoria di P volge sempre la concavità verso il basso, nella parte di essa percorsa da P al variare di t nell'intervallo $(0, \lambda)$, ed è rettilinea e verticale nell'eventuale parte rimanente; la (8) che $y'(t)$ è decrescente tutte le volte che è positiva o nulla, essa, pertanto, non può esser nulla che, al più, in un punto; e poichè in un intorno destro dello zero è $y'(t) > 0$, si avrà $y'(t) > 0$ a sinistra di un eventuale punto t_0 dell'intervallo $(0, \Lambda)$ ove riesca $y'(t_0) = 0$, per essere poi sempre, a destra, $y'(t) < 0$.

Per quanto precede, possiamo asserire che i limiti

$$\lim x, \ \lim x', \ \lim y, \ \lim (y'^2 + 2gy), \quad \text{per} \quad t \to \Lambda,$$

riescono, ciascuno, ben determinati e che:

$$\lim x' = \text{quantità finita non negativa}, \ \lim x > 0,$$
$$\lim (y'^2 + 2gy) < +\infty, \quad \text{e quindi} \quad \lim y < +\infty.$$

Dimostreremo che: *Uno almeno dei limiti*

(9) $$\lim x, \ \lim y, \ \lim (y'^2 + 2gy), \quad \text{per} \quad t \to \Lambda,$$

deve risultare infinito. Se così non fosse ne seguirebbe l'univoca determinazione e la finitezza di ciascuno dei quattro limiti

(10) $$\bar{x} = \lim x, \ \bar{y} = \lim y, \ \lim x', \ \lim y'. \quad \text{per} \quad t \to \Lambda$$

e dico che allora sarebbe

(11) $$\lim v > 0, \quad \text{per} \quad t \to \Lambda.$$

Ed invero, se fosse $\lim v = 0$ si avrebbe $\lim x' = \lim y' = 0$, e dalle (3), in virtù delle (1) e (2),

$$\max_{t \to \Lambda} \lim y'' \leqq -g + \max_{t \to \Lambda} \lim F(t, x, y, x', y') < -g + \Phi(\bar{x}, \bar{y}, 0, 0) < 0,$$

e ne seguirebbe $y'(t) > 0$ in tutto $(0, \Lambda)$. Ora ciò è assurdo se esiste in $(0, \Lambda)$ il punto λ poichè risulterebbe $\lim (y'/x')(t \to \lambda - 0) = +\infty$, ciò che non è possibile per la stabilita decrescenza del rapporto y'/x' nell'intervallo $(0, \lambda)$. Non esista dunque il punto λ. Si avrà allora

(12) $$\lim_{t \to \Lambda} \frac{y'}{x'} \geqq 0,$$

e ciò è del pari assurdo. Ed invero, si ha

(13) $$\frac{d}{dt} \frac{y'}{x'} = -\frac{g}{x'}, \quad \text{donde} \quad \lim_{t \to \Lambda} \frac{d}{dt} \frac{y'}{x'} = -\infty,$$

e quindi o $\Lambda = +\infty$, ed allora non possono evidentemente coesistere la (12) e la seconda della (13), o $\Lambda < +\infty$, ed allora, detto M il massimo di Φ nel dominio $0 \leqq x \leqq \bar{x}$, $0 \leqq y \leqq \bar{y}$, $0 \leqq x' \leqq x_0'$, $0 \leqq y' \leqq y_0'$, dalle (3) si ricava $x'(t) < M(\Lambda - t)$, per $t < \Lambda$, e quindi, dalla prima delle (13),

$$\frac{d}{dt}\frac{y'}{x'} < -\frac{g}{M(\Lambda - t)}, \quad \text{per} \quad t < \Lambda,$$

ciò che è in contradizione con la (12).

Dimostrata così la (11) come conseguenza della finitezza dei limiti (9), ne segue l'assurdità di ciò, quando riuscisse $\Lambda < +\infty$, poichè allora l'intervallo $(0, \Lambda)$ non sarebbe il massimo intervallo, aperto a destra, nel quale è possibile definire una soluzione (x, y) delle (3) verificante la (4). Se poi riuscisse $\Lambda = +\infty$ dovrebbe aversi $\lim x' = \lim y' = 0$ e quindi, come abbiamo già visto, $\max\lim y'' < 0$, ma è assurdo che con $\max\lim y''(t)(t \to +\infty) < 0$ si possa avere $\lim y'(t)(t \to +\infty) = 0$.

Si può, dopo ciò, con l'identico ragionamento fatto in (N'), dimostrare che

$$\lim_{t \to \Lambda} y(t) = -\infty. \tag{14}$$

Poichè in un intorno dello zero è $y(t) > 0$, se ne deduce l'esistenza di un punto T dell'intervallo $(0, \Lambda)$ per cui è $y(T) = 0$, e quindi di un punto t_0, interno all'intervallo $(0, T)$, in cui è nulla $y'(t)$, laddove risulta $y'(t) > 0$, per $0 \leq t < t_0$, $y'(t) < 0$, per $t > t_0$. Dalla seconda delle (3) si trae, dopo ciò, [cfr. (N''). n. 3] per $t > t_0$,

$$y(t) - y(t_0) > -g\,\frac{(t - t_0)^2}{2},$$

donde, in forza della (14)

$$\Lambda = +\infty.$$

Si può ora ripetere, senz'altro, la rimanente analisi del n. 1 di (N'), ed osservando che l'ipotesi $y_0' \leq 0$ non ha altra influenza che di rendere, in ciò che procede, sempre non negativa $y'(t)$ per $t > 0$, possiamo enunciare il risultato generale di Scorza-Dragoni:

I. *Nelle ipotesi* 1°) *e* 2°) *per la* F, *impressa al punto grave* P *una velocità iniziale di componente orizzontale* x_0' *positiva, esso, al crescere all'infinito del tempo, descrivere una traiettoria, tutta situata nel semipiano delle* x *positive, dotata ovunque di tangente ben determinata, la cui inclinazione* θ *è sempre decrescente e maggiore di* $-\pi/2$ *e definitivamente negativa, l'ordinata di* P *divergendo negativamente e la sua velocità conservandosi di componente orizzontale positiva e decrescente* [4].

[4] Dalla decrescenza di x' e di $y'^2 + 2gy$ si traggono poi tutte le ulteriori proprietà del moto nei punti della traiettoria di eguale quota. In una tesi di laurea in corso una mia allieva ha fatto per queste talune nuove osservazioni, perfezionando anche i consueti procedimenti.

2. La velocità iniziale ha nulla la componente orizzontale. — Il moto di P avviene allora sull'asse verticale y, condotto per la posizione iniziale O di P. Porremo $F(t, 0, y, 0, y') = F(t, y, y')$, $\Phi(0, y, 0, y') = \Phi(y, y')$. La y del punto P verifica le seguenti equazioni:

$$(15) \qquad \begin{cases} y'' \begin{cases} = -g - F(t, y, y') \operatorname{sign} y', & \text{per} \quad y' \neq 0 \\ = -g, & \text{per} \quad y' = y, \end{cases} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = y_0', \end{cases}$$

$$(16) \qquad \frac{d}{dt}(y'^2 + 2gy) = -2F|y'|.$$

Basta limitarsi a studiare il moto nell'ipotesi $y_0' > 0$. Sia $(0, t_0)$ il massimo intervallo di tempo, aperto a destra, in cui è possibile definire una soluzione y delle (15) con la condizione

$$(17) \qquad y'(t) > 0.$$

Dalla prima delle (15) si trae allora $y''(t) < -g$, e quindi deve t_0 risultare finito. Per $t \to t_0$ riescono ben determinati $\lim y'(t)$, $\lim y(t)$, il primo non negativo ed il secondo positivo, ed evidentemente entrambi finiti. Ne segue, per l'ipotesi fatta sull'intervallo $(0, t_0)$, $\lim y'(t)(t \to t_0) = 0$. Posto $y(t_0) = Y$, si ha all'istante t_0:

$$y'' = -g, \; y(t_0) = Y, \; y'(t_0) = 0,$$

e quindi $y'(t) < 0$ in un certo intorno destro di t_0. Diaciamo (t_0, Λ) il massimo intervallo di tempo *aperto* in cui è possibile definire una soluzione y delle (15) verificante la condizione

$$(18) \qquad y'(t) < 0.$$

Si ha, in (t_0, Λ),

$$(19) \qquad y'' = -g + F(t, y, y').$$

Esistono, ben determinati, i limiti

$$(20) \qquad \lim y < +\infty, \; \lim (y'^2 + 2gy) < +\infty, \quad \text{per} \quad t \to \Lambda,$$

e dico che non possono entrambi risultare finiti, ciò che ha di conseguenza la (14), e quindi, in forza della (19), $\Lambda = +\infty$. Se entrambi i limiti (20) risultassero finiti ne seguirebbe l'univoca determinazione e la finitezza dei due limiti $\bar{y} = \lim y(t)$, $\lim y'(t)$ e non potrebbe quest'ultimo essere nullo poichè dalla (19) si ricaverebbe $\max \lim y''(t) < 0$, e ciò è incompatibile con la (18) e con $\lim y'(t) = 0$. Si avrebbe dunque ancora

$$(21) \qquad \lim_{t \to \Lambda} y'(t) < 0.$$

Ora ciò è assurdo, per l'ipotesi fatta sull'intervallo (t_0, Λ), quando Λ fosse finito, e, nell'altro caso, per l'impossibilità che $y(t)$ abbia un limite finito sussistendo la (21). Si giunge dunque al risultato:

II. *Nelle ipotesi* 1ª) *e* 2ª) *per la* F, *impressa al punto grave* P *una velocità iniziale di componente orizzontale nulla, il moto avviene sull'asse verticale* y *condotto per la posizione iniziale* O. *Se la componente verticale* y_0' *di detta velocità è positiva, la quota* y *di* P *riesce crescente e la velocità positiva e decrescente in un primo intervallo di tempo* $(0, t_0)$, *aperto a destra. All'istante* t_0 *la quota* y *di* P *raggiunge il suo massimo* Y *e la velocità si annulla. Negli istanti successivi a* t_0 *la quota* y *decresce sempre e, al crescere all'infinito del tempo, diverge negativamente, la velocità conservandosi sempre negativa* (5). *Se* $y_0' \leq 0$, *la quota* y *è sempre decrescente e la velocità sempre negativa,* y *divergendo negativamente al crescere all'infinito del tempo.*

3. **La resistenza del mezzo dipende soltanto dalla grandezza della velocità del mobile.** — Se facciamo, dapprima, l'ipotesi che la velocità iniziale abbia non nulla la componente orizzontale, dette φ e V le misure dell'angolo di proiezione e della grandezza della velocità iniziale, sussistono le equazioni:

$$\text{(22)}\qquad \begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = -F(v) - g\,\mathrm{sen}\,\theta, & \dfrac{d\theta}{dt} = -g\dfrac{\cos\theta}{v}, \\ v(0) = V, & \theta(0) = \varphi, \end{cases}$$

con $V > 0$, $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$. Porremo

$$F(0) = \gamma, \quad \lim_{t \to \infty} \theta(t) = -\omega,$$

e riesce $\gamma < g$, $0 < \omega \leq \pi/2$. Per la $F(v)$ faremo le ulteriori ipotesi:

a) *essa è uniformemente lipschitziana in ogni intervallo finito che escluda lo zero* (6);

b) *riesce*

$$\text{(23)}\qquad \min\lim_{v \to \infty} F(v) > g.$$

(5) Dalla (16) segue che la grandezza della velocità di P, nel transitare per un fissato qualsiasi punto del tratto $(0, Y)$ della verticale, è maggiore in salita che in discesa.

(6) Cioè, ad ogni intervallo (α, β) $(0 < \alpha < \beta)$ è possibile far corrispondere un numero positivo $L(\alpha, \beta)$ tale che, comunque si prendano due valori v_1 e v_2 dell'intervallo, riesca:

$$|F(v_1) - F(v_2)| < L(\alpha, \beta)\,|v_1 - v_2|.$$

Si può dimostrare allora che:

III. *Al crescere all'infinito del tempo l'inclinazione* θ *ha per limite* $-\pi/2$ *e* v *ha pur essa un limite determinato, non nullo e finito.*

Segue intanto dalle (22) [cfr. (N'), teor. III] che v' è crescente in ogni suo punto di zero (7) e pertanto che essa non può avere che, al più, un punto di zero t_1 e sarà sempre negativa prima di t_1, sempre positiva dopo. Esiste quindi, ben determinato, il limite

$$w = \lim_{t \to \infty} v(t).$$

Dico che $w > 0$. Se fosse $w = 0$, si ricaverebbe dalla prima delle (22) $\lim v'(t)(t \to \infty) = -\gamma + g \operatorname{sen} \omega = 0$ e quindi $\omega < \pi/2$ e, dalla seconda delle (22), $\lim \theta'(t)(t \to \infty) = -\infty$, il che è assurdo per avere $\theta(t)$ limite finito. Dico che $w < +\infty$. Se fosse $w = +\infty$, si ricaverebbe dalla prima delle (22) e dalla (23)

$$\max_{t \to \infty} \lim v'(t) = g \operatorname{sen} \omega - \min \lim F(v) < g \operatorname{sen} \omega - g \leq 0,$$

e ciò è assurdo con $\lim v(t) = +\infty$. Si ha dunque $\lim \theta'(t) = -(g/w) \cos \omega$, e quindi $\lim \theta'(t) = 0$, e pertanto $\omega = \pi/2$. Ne segue:

IV. *Il limite* w, *la cosidetta velocità finale, è radice dell'equazione*:

$$F(v) - g = 0 \quad (8). \tag{24}$$

Se si aggiunge l'ipotesi:

c) *L'equazione* (24) *ha una sola radice,*

la velocità finale w risulta ben determinata, come radice della (24), ed è indipendente dai parametri V e φ.

Ovviamente, le ipotesi *b*) e *c*) sono verificate se $F(v)$ riesce ovunque crescente e prende il valore g (per $v > 0$). Osserviamo il teorema:

V. *Nell'ulteriore sola ipotesi* a) *per la* F(v), *se, in un certo istante* t_0, *riesce* $x'(t_0) = 0$, $y'(t_0) = -v_0$, *essendo* v_0 *una radice dell'equazione* (24), *sarà sempre* $x'(t) = 0$, $y'(t) = -v_0$, *il moto avverrà cioè sulla verticale condotta per la posizione iniziale* O *e sarà uniforme e discendente, con velocità di grandezza* v_0.

(7) Se t è un punto di zero di $v'(t)$ si trae invero dalle (22), anche se $F(v)$ è soltanto lipschitziana in $v(t)$,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{v'(t + \Delta t) - v'(t)}{\Delta t} = g^2 \frac{\cos^2 \theta}{v}.$$

(8) Ne segue che: *Detta* W *la massima fra le radici della* (24), *la grandezza della velocità non supera mai il maggiore fra i due numeri* V *e* W.

Ed invero, le equazioni

$$x'' = -F(v)x'/v, \quad y'' = -g - F(v)y'/v,$$
$$x'(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = -v_0,$$

individuano, in modo unico, x' e y', in tutto l'intervallo $(0, \infty)$, ed intanto esse sono verificate quando vi si ponga $x' \equiv 0$, $y' \equiv -v_0$. Ne segue:

VI. *Nelle ulteriori ipotesi* a) *e* b) *per la* F(v), *impressa al grave* P *una velocità iniziale di componente orizzontale nulla, il moto avviene sull'asse verticale* y *condotto per la posizione iniziale* O, *e al crescere all'infinito del tempo la* v *ha un limite determinato, finito e non nullo* w. *Tale limite è la più piccola radice dell'equazione* (24) *e ad essa la* v *tende crescendo se* $y_0' \geqq 0$; *la* v *è sempre crescente e* w *è la più piccola radice della* (24) *maggiore di* $|y_0'|$ *se* $y_0' \leqq 0$ *e* $F(|y_0'|) < g$; *la* v *è sempre decrescente e* w *è la più grande radice minore di* $|y_0'|$ *se* $y_0' < 0$ *e* $F(|y_0'|) > g$; *la* v *è costante se* $y_0' < 0$ *e* $F(|y_0'|) = g$.

Sia $y_0' > 0$, detto t_0 (cfr. n. 2) l'istante in cui si annulla la velocità di P, le equazioni del suo moto si scrivono:

$$v'(t) = -g - F(v), \quad \text{per} \quad t < t_0,$$
$$v'(t) = \quad g - F(v), \quad \text{per} \quad t > t_0,$$
$$v(t_0) = 0.$$

Si ha $\lim v'(t)(t \to t_0 + 0) = g - \gamma > 0$, e quindi $v'(t)$, positiva in un intorno destro dello zero, tale si manterrà, in virtù del teor. V, in tutto l'intervallo $(t_0, +\infty)$. La $v(t)$ si conserva dunque sempre crescente dopo l'istante t_0 e non potrà crescere all'infinito in forza dell'ipotesi *b*). Posto $w = \lim v(t)(t \to \infty)$, si ha $\lim v'(t)(t \to \infty) = g - F(w)$ e quindi $F(w) = g$. Facendo pertanto crescere t da t_0 all'infinito, la $v(t)$, dal valore zero che ha per $t = t_0$, tende, crescendo sempre, ad una radice della (24), senza mai eguagliare una tale radice, e pertanto w non può essere che la più piccola radice della (24).

Sia $y_0' < 0$, posto $|y_0'| = V$, le equazioni del moto di P si scrivono

$$v'(t) = g - F(v), \quad \text{per} \quad t > 0,$$
$$v(0) = V,$$

onde segue, in base al teor. V, la perenne crescenza, decrescenza e costanza di $v(t)$, secondoche $F(V)$ è minore, maggiore e uguale a g. Ecc.

4. Teoremi generali sulla velocità minima nelle ipotesi del n. precedente. — Nella ricerca del minimo per la grandezza della velocità nel moto di P, il teor. VI fornisce il risultato:

VII. *Verificandosi per* $\mathrm{F(v)}$ *le ipotesi* a) *e* b) *del n. prec., se il moto di* P *avviene sulla verticale, la grandezza della velocità ha sempre un minimo, ed uno solo, se* $\mathrm{y_0}' \geqq 0$ *oppure se* $\mathrm{y_0}' \leqq 0$ *e* $\mathrm{F(|y_0'|) < g}$, *nel primo caso tale minimo è lo zero, nel secondo è* $\mathrm{|y_0'|}$; *detta grandezza è costante se* $\mathrm{y_0'} < 0$ *e* $\mathrm{F(|y_0'|) = g}$, *non ha minimo se* $\mathrm{y_0'} < 0$ *e* $\mathrm{F(|y_0'|) > g}$.

Se il moto non avviene sulla verticale, la ricerca, che andiamo ora a trattare, del minimo per la grandezza della velocità non offre un risultato della semplicità di quello ora enunciato. Ci metteremo nelle ipotesi *a*), *b*), *c*) per la $F(v)$, nelle quali, dunque, tutte le traiettorie hanno una comune velocità finale w per la quale si ha:

$$F(w) = g.$$

Potremo ora riferire P all'inclinazione cambiata di segno $\tau = -\theta$ della traiettoria, che varia nell'intervallo $(-\varphi, \pi/2)$, aperto a destra, e tenere le sole equazioni dell'odografo:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dv}{d\tau} &= \frac{v}{g \cos \tau}[g \operatorname{sen} \tau - F(v)], \\ v(-\varphi) &= V. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Osserviamo che, per l'eventuale valore di τ ove si annulla $\frac{dv}{d\tau}$, riesce:

$$\frac{d^2v}{d\tau^2} = v > 0, \tag{26}$$

e che, per un valore di τ ove si abbia $v(\tau) = w$, riesce $\frac{dv}{d\tau} < 0$, ne segue:

VIII. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la grandezza della velocità sia dotata di minimo è che esista per essa un valore non superiore alla velocità finale* w, *Al tendere di* τ *verso* $\pi/2$ *riesce definitivamente*

$$\frac{dv}{d\tau} > 0 \quad \textit{oppure} \quad \frac{dv}{d\tau} < 0,$$

e soltanto nel primo caso vi è il minimo per v. *Se non si è in questo caso* v *è sempre decrescente e maggiore di* w. *Per ogni traiettoria la cui velocità iniziale ha grandezza* V *non superiore alla* *finale* w, *esiste il minimo di* v, *che è conseguito all'inizio del moto quando e solo quando sia*

$$F(V) + g \operatorname{sen} \varphi \leqq 0.$$

Queste ovvie osservazioni ci consentono anche, quando giovi, di limitare la ricerca delle traiettorie dotate di minimo per la v a quelle a cui competa una grandezza iniziale V della velocità maggiore della finale. Per ogni tale traiettoria si ha $F(V) + g \operatorname{sen} \varphi > g(1 + \operatorname{sen} \varphi) > 0$ e quindi che la grandezza della velocità è sempre inizialmente decrescente e pertanto che nell'eventuale valore di τ in cui v consegue il minimo riesce:

$$\frac{dv}{d\tau} = 0, \quad g \operatorname{sen} \tau - F(v) = 0. \tag{27}$$

Denoteremo con $\Gamma_F(\varphi, V)$ la traiettoria di angolo di proiezione φ e di velocità iniziale di grandezza V, relativa alla funzione resistente F. E dicendo, semplicemente, che *essa ha il minimo* intenderemo significare che è dotata di minimo per la grandezza della velocità del grave P.

Un criterio che può essere utilmente applicato, come vedremo, per la ricerca delle traiettorie provviste di minimo è fornito dal seguente **teorema di confronto:**

IX. *Sia* E(v) *una seconda funzione resistente che verifichi le ipotesi* a), b), c) *della* F(v), *e per la quale si abbia:*

$$F(v) \geqq E(v), \quad per \quad w < v \leqq V, \tag{28}$$

$$F(w) = E(w), \tag{29}$$

dico che quando la traiettoria $\Gamma_E(\varphi, V)$ *ha il minimo lo ha pure* $\Gamma_F(\varphi, V)$.

Dimostreremo invero che se $v(\tau)$ non ha minimo in $\Gamma_F(\varphi, V)$, non lo avrà neppure la grandezza $u(\tau)$ della velocità in $\Gamma_E(\varphi, V)$, cioè che se è sempre $v(\tau) > w$ sarà pure sempre $u(\tau) > w$. Si ha:

$$\frac{d(u - v)}{d\tau} = (u - v) \operatorname{tang} \tau + \frac{vF(v) - uE(u)}{g \cos \tau},$$

e quindi, in base alla (28), ove in primo luogo supporremo valido il segno $>$; e all'ipotesi $v(\tau) > w$, la crescenza di $u - v$ in ogni suo punto di zero. Pertanto, $u - v$, inizialmente nulla, sarà sempre positiva per $\tau > -\varphi$, donde, per essere sempre $v(\tau) > w$, ne seguirà pure sempre $u(\tau) > w$.

Nella (28) non sia ora sempre valido il segno $>$. Introdurremo una funzione $H(v)$ essa pure uniformemente lipschitziana in ogni intervallo finito, limitata, positiva per $v > w$, identicamente nulla per $v \leq w$, e per la quale infine si abbia sempre $F(v) - H(v) > g$, per $v > w$. Sia ora λ un parametro al quale daremo valori positivi e in un conveniente intorno destro I dello zero per modo che $F(v) - \lambda H(v)$ verifichi le ipotesi *a*), *b*), *c*) della $F(v)$ e denoteremo con $E(v, \lambda)$ quella funzione che, per ogni v ha come valore il minore fra i due $E(v)$ e $F(v) - \lambda H(v)$, porremo cioè

$$E(v, \lambda) = \frac{1}{2}\Big(E(v) + F(v) - \lambda H(v) - | E(v) - F(v) + \lambda H(v) |\Big).$$

La $E(v, \lambda)$, per λ in I, verifica le ipotesi *a*), *b*), *c*) e si ha inoltre

$$F(v) > E(v, \lambda), \quad \text{per} \quad v > w,$$
$$F(w) = E(w, \lambda), \quad \lim_{\lambda \to 0} E(v, \lambda) = E(v).$$

Detta $u(\tau, \lambda)$ la grandezza della velocità nella traiettoria $\Gamma_{E(v,\lambda)}(\varphi, V)$, dalla diseguaglianza $v(\tau) > w$ si trae, come abbiamo visto, $u(\tau, \lambda) > v(\tau)$, per $\tau > -\varphi$, onde segue $u(\tau) = \lim u(\tau, \lambda)(\lambda \to 0) \geq v(\tau)$, per $\tau > -\varphi$, e quindi, di nuovo, $u(\tau) > w$.

Dalla dimostrazione esposta segue pure il teorema (9):

IX′. *Se* [cfr. nota (8)], *la grandezza* $\mathrm{v}(\tau)$ *della velocità in* $\Gamma_{\mathrm{F}}(\varphi, \mathrm{V})$ *è superiormente limitata dal numero* M *e si ha* $\mathrm{E(v)} \geq \mathrm{F(v)}$, *per* $\mathrm{v} \leq \mathrm{M}$, *per la grandezza* $\mathrm{u}(\tau)$ *della velocità in* $\Gamma_{\mathrm{E}}(\varphi, \mathrm{V})$ *riesce* $u(\tau) \leq \mathrm{v}(\tau)$.

Questo teorema può essere utilmente applicato per la limitazione inferiore della v, tutte le volte che si possa scegliere E in maniera che sia facilmente calcolabile $u(\tau)$, Così, per esempio, si trova che: *Se, per* $\mathrm{v} \leq \mathrm{M}$, *riesce* $\mathrm{F(v)} \leq \mathrm{av}$, *si ha*:

$$v(\tau) \geq \frac{gV\cos\varphi}{(g + aV\operatorname{sen}\varphi)\cos\tau + aV\cos\varphi\operatorname{sen}\tau} \geq \frac{gV\cos\varphi}{g + aV}.$$

Se, per $\mathrm{v} \leq \mathrm{M}$, *riesce* $\mathrm{F(v)} \leq \mathrm{av}^2$, *si ha*:

$$v^2(\tau) \geq \frac{gV^2\cos^2\varphi}{g\cos^2\tau + 2aV^2\cos^2\varphi\cos^2\tau\displaystyle\int_{-\varphi}^{\tau}\frac{d\sigma}{\cos^3\sigma}}, \tag{30}$$

(9) Cfr. SIGNORINI, *Un teorema di confronto in balistica esterna ed alcune sue applicazioni*. « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », t. XLIII (1919), pp. 357-393. Quì, a pag. 365, è già stabilito un teorema di confronto che, cangiandone la dimostrazione in quella da noi ora data, può essere esteso in modo da comprendere anche, come caso particolare, il teorema IX′ del testo.

od anche, osservando che, per qualunque valore di τ,

$$\cos^2\tau \left| \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau}{2}\right) \right| < \frac{1}{2},$$

si ha pure:

$$(31)\quad v^2(\tau) \geqq \frac{2gV^2\cos^2\varphi(aV^2+2g+2aV^2\operatorname{sen}\varphi)}{a^2V^4(3+6\operatorname{sen}\varphi+2\operatorname{sen}^2\varphi-2\operatorname{sen}^3\varphi)+2gaV^2(3+4\operatorname{sen}\varphi-\operatorname{sen}^2\varphi)+4g^2}.$$

Tale formola, con le sue possibili estensioni, riesce utilissima nel calcolo delle traiettorie [10]. Si ponga, per esempio, $F(v) = cf(v)$, ove c è una costante e $f(v)$ è la funzione resistente di SIACCI [11], si ha allora, qualunque sia M, $F(v) \leqq c\alpha v^2$, con $\alpha = 0{,}000349$, e quindi il teorema:

Posto F(v) = cf(v), *ove* c *è una costante e* f(v) *la funzione resistente di Siacci, per qualsivoglia traiettoria sussiste la limitazione inferiore per il quadrato della grandezza della velocità che si ottiene dalla* (30) *o dalla* (31) *ponendovi*

$$a = 0{,}000349 \cdot c.$$

Se, ora, conservando le ipotesi *b*) e *c*), sostituiamo alla *a*) la seguente più restrittiva:

a′) *La* F(v), *per ogni* v > 0, *è dotata di derivata prima continua,*

dalla (26), in base all'elementare teoria delle funzioni implicite, applicata all'equazione $v_\tau(\tau, \varphi, V) = 0$, si deduce che:

X. *L'insieme del piano* (φ, V) *per ciascun punto del quale — essendo* $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, V > 0 — *esiste un valore di* τ *verificante la* (27), *è aperto.*

Da questo teorema e dal teor. VII di (N′) che, ovviamente, rimane valido anche nelle ipotesi *a′*), *b*), *c*), si deduce il seguente:

XI. *La* F(v) *verifichi le ipotesi* a′), b), c). *Tenuta fissa* V(> *w*), *avviene che o la traiettoria* $\Gamma(\varphi, V)$ *è dotata di minimo per quale si sia* φ *od esiste un valore* $\bar{\varphi}(V)$ *tale che* $\Gamma(\varphi, V)$ *ha il minimo per ogni* $\varphi > \bar{\varphi}$, *non lo ha per ogni* $\varphi \leqq \bar{\varphi}$. *Riesce* $\bar{\varphi}$ *minore dell'angolo* ψ, *positivo e minore di* $\pi/2$, *per cui* $\cos\psi = w/V$. *Tenuto fisso* φ, *avviene che o* $\Gamma(\varphi, V)$ *è dotata di minimo per qualsiasi* V *od esiste un valore* $\bar{V}(\varphi)$ *tale che* $\Gamma(\varphi, V)$ *ha il minimo per ogni* $V < \bar{V}$, *non lo ha per ogni* $V \geqq \bar{V}$. *Riesce* $\bar{V} > w$.

[10] Col metodo attualmente in esperimento presso l'Istituto di Calcolo della R. Università di Napoli.

[11] SIACCI, *Sulla resistenza dell'aria nel moto dei proietti.* « Rivista d'Artiglieria e Genio », 1896 (vol. I).

Tenuta fissa $V(> w)$, per ogni $\varphi \geqq \psi$ si ha $V \cos \varphi \leqq w$ e poichè la $\Gamma(\varphi, V)$ ha al vertice una velocità di grandezza minore di $V \cos \varphi$, ne segue che essa (teor. VIII) è dotata di minimo. Se $\Gamma(\varphi_0, V)$ non ha il minimo risulta $v(\tau, \varphi_0) > w$ per $\tau \geqq -\varphi_0$, ma [teor. VII di (N')]

$$v(\tau, \varphi) > v(\tau, \varphi_0) > w, \quad \text{per} \quad \varphi < \varphi_0, \; \tau \geqq -\varphi,$$

donde $\Gamma(\varphi, V)$ non ha neppure il minimo per ogni $\varphi < \varphi_0$ e da ciò, in base al teor. X, segue l'esistenza di un angolo $\overline{\varphi}(< \psi)$ tale che $\Gamma(\varphi, V)$ ha il minimo o pur no secondochè $\varphi > \overline{\varphi}$ o $\varphi \leqq \overline{\varphi}$. Ecc.

Si ha, ancora, in base al teor. VIII di (N'):

XII. *Se, alle ipotesi* a'), b), c) *si aggiunge quella della monotonia di* F(v), *detto* $\tau_1(\varphi, V)$ *il valore di* τ *ove è conseguito il minimo per* v *nella traiettoria* $\Gamma(\varphi, V)$, *si ha:*

$$\lim \tau_1(\varphi, V)(\varphi \to \overline{\varphi} + 0) = \lim \tau_1(\varphi, V)(V \to \overline{V} - 0) = \pi/2.$$

5. **Ricerca della velocità minima nelle ipotesi $F(v) = av^n$, $F(v) = av + b$.** — Vogliamo ora, in ciascuna di queste ipotesi, ove a, n, b sono costanti, le prime due positive e la terza minore di g, compiere in modo rapido la ricerca delle traiettorie dotate di minimo per la grandezza della velocità, per apportare qualche ulteriore precisazione ai risultati ottenuti dal SIACCI [loc. cit. ([3])] sullo stesso argomento.

$F(v) = av^n$. Per $\tau > 0$, la derivata $dv/d\tau$ ha lo stesso segno di

$$\frac{1}{v^{n+1} \cos^{n-1} \tau \operatorname{sen} \tau} \frac{dv}{d\tau},$$

cioè, in virtù dell'equazione dell'odografa, di

$$\frac{1}{v^n \cos^n \tau} - \frac{a}{g} \frac{1}{\cos^n \tau \operatorname{sen} \tau};$$

d'altra parte, dalla stessa equazione, si ricava

$$\frac{1}{v^n \cos^n \tau} = \frac{1}{V^n \cos^n \varphi} + \frac{na}{g} \int_{-\varphi}^{\tau} \frac{d\sigma}{\cos^{n+1} \sigma},$$

e quindi. in base al teor. VIII si ha che: La traiettoria $\Gamma(\varphi, V)$ sarà dotata di minimo e pur no secondochè, per $\tau \to \pi/2$, riesce definitivamente

$$H(\tau) = \frac{g}{naV^n \cos^n \varphi} + \int_{-\varphi}^{\tau} \frac{d\sigma}{\cos^{n+1} \sigma} - \frac{1}{n \operatorname{sen} \tau \cos^n \tau}, \tag{32}$$

positiva o negativa. Ma si ha:

(33) $$\frac{dH}{d\tau}=\frac{1}{n\,\mathrm{sen}^2\tau\cos^{n-1}\tau},$$

e quindi la crescenza di $H(\tau)$, onde possiamo dire che la traiettoria $\Gamma(\varphi,\ V)$ sarà dotata di minimo o pur no secondochè

(34) $$L(\varphi,\ V)=\lim_{\tau\to\pi/2} H(\tau)$$

è positivo o no. Ora, per $n\geqq 2$, la derivata di H, data dalla (33), diverge positivamente, d'ordine non inferiore ad uno, ed il limite (34) vale perciò $+\infty$ e si ha dunque il teorema di SIACCI:

XIII. *Per* n $\geqq 2$, *ogni traiettoria, quali si siano i suoi parametri, è dotata di minimo.*

Per $n<2$, si ha

(35) $$L(\varphi,\ V)=\frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{n\cos^n\varphi}+\frac{n-1}{n}\int_{-\varphi}^{\pi/2}\frac{d\sigma}{\cos^{n-1}\sigma}+\frac{g}{naV^n\cos^n\varphi},$$

e risulta

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi}=\frac{aV^n+g\,\mathrm{sen}\,\varphi}{aV^n\cos^{n+1}\varphi},$$

e quindi, fissato V, poichè possiamo limitarci a considerare il caso $V>w$, cioè $aV^n>g$,

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi}>0,\quad \lim_{\varphi\to-\pi/2}L(\varphi,\ V)=-\infty,\quad \lim_{\varphi\to\pi/2}L(\varphi,\ V)=+\infty;$$

esiste pertanto uno ed un solo valore di $\varphi=\bar\varphi(V)$ per cui riesce:

(36) $$n\cos^n\varphi L(\varphi,\ V)\equiv\mathrm{sen}\,\varphi+(n-1)\cos^n\varphi\int_{-\varphi}^{\pi/2}\frac{d\sigma}{\cos^{n-1}\sigma}+\frac{g}{aV^n}=0.$$

$$L(\varphi,\ V)\begin{cases}>0 & \text{per}\quad \varphi>\bar\varphi(V),\\ <0 & \text{per}\quad \varphi<\bar\varphi(V),\end{cases}$$

onde segue:

XIV. *Supposto* n <2 *e* a$\mathrm{V}^{\mathrm{n}}>$ g, *l'equazione* (36) *definisce un ben determinato angolo* $\bar\varphi(\mathrm{V})$, $-\pi/2<\bar\varphi(\mathrm{V})<\pi/2$, *tale che la traiettoria* $\Gamma(\varphi,\ \mathrm{V})$ *riesce dotata di minimo o pur no secondochè* φ *supera o no* $\bar\varphi(\mathrm{V})$ [12].

[12] SIACCI [loc. cit. [3]] aveva già osservato, ma soltanto per i valori di n compresi fra 1 e 2 che, condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del minimo di v, è che il limite L, dato dalla (35), risulti positivo.

Si ha

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dV}=\frac{g}{V\cos\varphi(aV^n+g\operatorname{sen}\varphi)},$$

e quindi che è ben determinato (e finito, $<\pi/2$) il limite

$$\psi_n=\lim_{V\to\infty}\bar{\varphi}(V),$$

esso è, come si deduce dalla (36) passando al limite per $V\to\infty$, quel ben determinato valore ψ_n, $-\pi/2<\psi_n<\pi/2$, per cui risulta

$$\int_0^{\psi_n}\frac{d\sigma}{\cos^{1+n}\sigma}=\frac{1-n}{n}\int_0^{\pi/2}\cos^{1-n}\sigma\,d\sigma, \tag{37}$$

onde segue:

XV. *Per ogni valore di* n <2, *detto* ψ_n *quel valore per cui è verificata la* (37), *ogni traiettoria* $\Gamma(\varphi, V)$, *con angolo di proiezione* $\varphi\geqq\psi_n$, *è sempre, quale si sia* V, *dotata di minimo* ([13]).

Si ha: $\psi_n\leqq 0$, per $n\geqq 1$; $\psi_n>0$, per $n<1$,

$$\lim_{n\to 0}\psi_n=\pi/2. \tag{38}$$

Fissato per φ un valore $\varphi^*<\psi_n$, esiste uno ed un sol valore V^* di V per cui $\bar{\varphi}(V^*)=\varphi^*$, ed allora $\Gamma(\varphi^*, V)$ sarà dotata di minimo o pur no secondochè V è minore o no di V^*. La (38) ci dice dunque che:

XVI. *Pur di dare ad* n *valori abbastanza piccoli, vi sono traiettorie non dotate di minimo prossime quanto si vuole alla verticale.*

$F(v)=av+b$. In tale ipotesi, poichè non è escluso che b possa esser negativo, intenderemo sempre di limitarci a considerare quelle traiettorie per le quali si ha sempre $av(\tau)+b>0$. Porremo $\alpha=a/g$, $\beta=b/g$. Per $\tau\to\pi/2$, la derivata $\frac{dv}{d\tau}$ ha definiti-

([13]) Dalla (32) si deduce, per ogni valore di φ quando è $n\geqq 2$ e per $\varphi\geqq\psi_n$ quando $n<2$, in particolare per $\varphi\geqq 0$ quando $n\geqq 1$, che l'inclinazione ove v consegue il minimo ha, per $V\to\infty$, il limite dato da quel ben determinato valore τ che verifica l'equazione:

$$n\operatorname{sen}\tau\cos^n\tau\int_{-\varphi}^{\tau}\frac{d\sigma}{\cos^{n+1}\sigma}=1.$$

vamente il segno di

$$\frac{\operatorname{tang}^\beta\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\tau}{2}\right)}{(\operatorname{sen}\tau-\beta)v^2}\frac{dv}{d\tau}=\frac{\operatorname{tang}^\beta\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\tau}{2}\right)}{v\cos\tau}-\alpha\frac{\operatorname{tang}^\beta\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\tau}{2}\right)}{\cos\tau(\operatorname{sen}\tau-\beta)},$$

cioè, per essere

$$\frac{\operatorname{tang}^\beta\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\tau}{2}\right)}{v\cos\tau}=\frac{\operatorname{tang}^\beta\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}{V\cos\varphi}+\alpha\int_{-\varphi}^{\tau}\operatorname{tang}^\beta\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sigma}{2}\right)\frac{d\sigma}{\cos^2\sigma},$$

il segno di

$$H(\tau)=\frac{\operatorname{tang}^\beta\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}{V\cos\varphi}+\alpha\int_{-\varphi}^{\tau}\operatorname{tang}^\beta\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sigma}{2}\right)\frac{d\sigma}{\cos^2\sigma}-\alpha\frac{\operatorname{tang}^\beta\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\tau}{2}\right)}{\cos\tau(\operatorname{sen}\tau-\beta)}.$$

Ma si ha:

$$\frac{dH}{d\tau}=\alpha\frac{\operatorname{tang}^\beta\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\tau}{2}\right)}{(\operatorname{sen}\tau-\beta)^2},$$

onde segue, come precedentemente, il teorema di SIACCI:

XVII. *Ogni traiettoria per la quale riesca* $av+b>0$, $F(v)=av+b$, *con* $b<-g$, *è dotata di minimo.*

Per $-g<b<g$ e $aV+b>g$, si trova

$$L(\varphi,\ V)=\lim_{\tau\to\pi/2}H(\tau)=$$

$$=\frac{\operatorname{tang}^\beta\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}{V\cos\varphi}+\frac{\alpha}{2}\left[\frac{\operatorname{tang}^{\beta-1}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}{\beta-1}+\frac{\operatorname{tang}^{\beta+1}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}{\beta+1}\right],$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi}=\frac{\operatorname{tang}^\beta\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}{gV\cos^2\varphi}(aV+b+g\operatorname{sen}\varphi)>0,$$

$$\lim_{\varphi\to-\pi/2}L(\varphi,\ V)=-\infty,\quad\lim_{\varphi\to\pi/2}L(\varphi,\ V)=+\infty,$$

onde segue, come precedentemente:

XVIII. *Supposto* $-g<b<g$, $aV+b>g$, *l'equazione* $L(\varphi, V)=0$, *definisce un ben determinato angolo* $\bar\varphi(V)$, $-\pi/2<\bar\varphi(V)<\pi/2$, *tale che, ogni traiettoria* $\Gamma(\varphi, V)$, *per la quale sia* $av+b>0$, $F(v)=av+b$, *riesce dotata di minimo o pur no secondochè* φ *supera o no* $\bar\varphi(V)$. *Si ha:*

$$\lim_{V\to\infty}\bar\varphi(V)=\psi_b=2\operatorname{arctang}\sqrt{\frac{g+b}{g-b}}-\frac{\pi}{2},\quad\lim_{b\to g}\psi_b=\frac{\pi}{2},$$

e quindi che, pur di dare a b *valori abbastanza prossimi a* g *vi sono, qualunque sia* a, *traiettorie non dotate di minimo prossime quanto si vuole alla verticale.*

6. Criteri sufficienti per l'esistenza del minimo della velocità. — I risultati del n. prec., col concorso del teor. IX. forniscono i seguenti criterii sufficienti per l'esistenza del minimo della grandezza della velocità, assai meno restrittivi di quelli stabiliti dal SIACCI [loc. cit. (²)]. Si ha, in primo luogo, dal teor. XIII, il seguente:

XIX. *Se, nelle ipotesi* a), b), c) *del* n. 3 *per la* F(v), *il rapporto* $F(v)/v^2$ *non è decrescente per* $v=w$, *a destra, ogni traiettoria è dotata di minimo quali ne siano i parametri.*

Sia, invero, δ quel numero positivo per cui risulti

$$\frac{F(v)}{v^2} \geqq \frac{F(w)}{w^2}, \quad \text{per} \quad w \leqq v \leqq w+\delta, \tag{39}$$

e poniamo $a = F(w)/w^2 = g/w^2$, $E(v) = av^2$. La $\Gamma_F(\varphi, V)$ non abbia minimo, risulti cioè sempre $v(\tau) > w$ e diciamo τ_0 quel valore di τ per cui riesce

$$w < v(\tau) \leqq w+\delta, \quad \text{per} \quad \tau \geqq \tau_0,$$

ponendo $v_0 = v(\tau_0)$. Avendosi, in virtù della (39),

$$F(v) \geqq E(v), \quad \text{per} \quad w < v \leqq v_0, \; F(w) = E(w),$$

ne seguirebbe la non esistenza del minimo per la $\Gamma_E(v_0, \tau_0)$, il che è assurdo in forza del teor. XIII. Analogamente, dal teor. XVII, segue:

XX. *Se, nelle ipotesi* a), b), c) *per la* F(v), *il rapporto* $[F(v)+g]/v$ *non è decrescente per* $v=w$, *a destra, ogni traiettoria possiede il minimo quali ne siano i parametri.*

I teoremi XIX e XX assicurano, concordemente, in particolare, l'esistenza del minimo per qualsivoglia traiettoria quando, risultando $F(v)$ derivabile per $v=w$, si abbia $wF'(w) > 2F(w)$. Sono corollarii dei teoremi XIV e XVIII rispettivamente i seguenti:

XXI. *Se, nelle ipotesi* a), b), c) *per la* F(v), *per una certa costante* $n<2$, *riesce*

$$\frac{F(v)}{v^n} \geqq \frac{F(w)}{w^n}, \quad \text{per} \quad w \leqq v \leqq V,$$

detto $\bar{\varphi}(V)$ *quel ben determinato valore di* φ *per cui è*

$$\operatorname{sen}\varphi + (n-1)\cos^n\varphi \int_{-\varphi}^{\pi/2} \frac{d\sigma}{\cos^{n-1}\sigma} + \left(\frac{w}{V}\right)^n = 0,$$

ogni traiettoria $\Gamma(\varphi, V)(V > w)$ *con angolo di proiezione* $\varphi > \bar{\varphi}(V)$ *è dotata di minimo; in particolare, quando sia* $n \geqq 1$, *ciò avviene per ogni angolo di proiezione non negativo.*

XXII. *Se, nelle ipotesi* a), b), c) *per la* $F(v)$, *per una certa costante* b, *maggiore di* $-g$ *e minore di* g, *riesce*

$$\frac{F(v)-b}{v} \geqq \frac{F(w)-b}{w}, \quad \text{per} \quad w \leqq v \leqq V,$$

detto $\bar{\varphi}(V)$ *quel ben determinato valore di* φ *per cui è*

$$\frac{2w}{V\cos\varphi} + \frac{g-b}{g+b}\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) - \cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) = 0,$$

ogni traiettoria $\Gamma(\varphi, V)(V > w)$ *con angolo di proiezione* $\varphi > \bar{\varphi}(V)$ *è dotata di minimo; in particolare, quando sia* $b \leqq 0$, *ciò avviene per ogni angolo di proiezione non negativo.*

I teoremi ottenuti possono avere pratiche applicazioni. Ad esempio, poniamo $F(v) = cf(v)$, ove c è una costante e $f(v)$ è la funzione resistente di SIACCI [loc. cit. ([11])]. La velocità finale w è quel valore per cui si ha $f(w) = g/c$ e riesce $f(v)/v^2$ non decrescente in w quando risulti $w < 525$, cioè $g/c = f(w) < 96{,}08$, e quindi

$$c > \frac{9{,}81}{96{,}08} = 0{,}102\ldots.$$

Adunque, in base al teor. XIX, possiamo dire che:

Per tutti quei proietti per i quali si possa ritenere $c > 0{,}102\ldots$, *ogni loro traiettoria, quali ne siano i parametri, è dotata di minimo.*

MAURO PICONE