VINCENZO G. CAVALLARO

Sull'approssimata determinazione dei centri di gravità di elementi circolari mediante divisione aurea

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.4, p. 193–196.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_4_193_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1931.

PICCOLE NOTE

Sull'approssimata determinazione dei centri di gravità di elementi circolari mediante divisione aurea.

Nota di VINCENZO G. CAVALLARO (a Cefalù).

Sunto - *Mediante una relazione semplice, approssimata, tra il rapporto aureo e il numero π, si trasformano le formule dei centri di gravità di elementi circolari in altre formule, approssimate, di facile impiego per la pratica.*

È noto che se λ è il rapporto d'un segmento s alla sua parte aurea, questa ha il valore

$$\lambda \cdot s = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)s = (0.6180339887\ldots)s,$$

mentre

$$\lambda^2 \cdot s = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)s = (0.3819660113\ldots)s$$

è il valore della parte minore del segmento s diviso in sezione aurea e altresì la parte aurea della parte maggiore.

Considero adesso la semplice espressione irrazionale, che fornisce un valore abbastanza approssimato di π, attribuita al matematico e giureconsulto francese FRANÇOIS VIÈTE (1540-1603) [1], riportata in alcuni libri ed anche in questo « Bollettino » [2]

$$\pi \backsimeq \frac{3}{5}(3+\sqrt{5})$$

e deduco:

$$\frac{1}{\pi} \backsimeq \frac{5}{3}\,\frac{1}{3+\sqrt{5}} = \frac{5}{6}\,\frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{5}{6}\lambda^2$$

(1) « Opera Mathematica », Ed. Schoeten, Ludguni Batavorum, 1646, pag. 393.

(2) A. VIII, n. 1, pag. 56, 1929.

osservando ch'è lieve la differenza dei valori numerici dei due membri della relazione approssimata semplicissima che vincola i due celebri rapporti π e λ:

$$\frac{1}{\pi} \backsimeq \frac{5}{6} \lambda^2. \tag{x}$$

Si ha infatti $\frac{1}{\pi} = 0.3183098861...$; $\frac{5}{6} \lambda^2 = 0.318305009...$

1. Ciò posto, se η è la distanza del baricentro d'una semicirconferenza di raggio R dal centro, è noto che $\eta = \frac{2R}{\pi}$; e questa relazione per effetto della (x) diviene:

$$\eta \backsimeq \frac{5}{3} \lambda^2 R. \tag{1}$$

E poichè, calcolando, si ha nei due casi $\eta = (0.636619772...)R$; $\eta = (0.636610018...)R$ ne segue che:

Il centro di gravità d'una semicirconferenza dista dal centro d'un segmento che è uguale ai $\frac{5}{3}$ del segmento minore del raggio diviso in sezione aurea, con errore minore di $\frac{1}{100.000}$ del raggio stesso.

2. Essendo ζ la distanza del baricentro d'un semicerchio di raggio R dal centro, è noto che $\zeta = \frac{4R}{3\pi}$: e questa relazione per effetto della (x) diviene:

$$\zeta \backsimeq \frac{10}{9} \lambda^2 R. \tag{2}$$

E poichè, calcolando, si ha nei due casi $\zeta = (0.424413181...)R$; $\zeta = (0.424406679...)R$, ne segue:

Il centro di gravità d'un semicerchio dista dal centro per un segmento che è uguale ai $\frac{10}{9}$ del segmento minore del raggio diviso in sezione aurea, con errore minore di $\frac{7}{1.000.000}$ del raggio stesso.

3. Se ξ è la distanza del baricentro d'un arco di circolo di raggio R dal centro, A la lunghezza dell'arco, C quella della corda che lo sottende, si ha, com'è noto, $\xi = \frac{R \cdot C}{A}$.

Qui considero l'arco di circolo che sia sotteso dalla corda uguale al lato l_n d'un poligono regolare di n lati inscritto in quel cerchio. Avendosi allora

$$A = \frac{2\pi R}{n}, \quad C = l_n,$$

segue

$$\xi_n = \frac{nRl_n}{2\pi R} = \frac{nl_n}{2\pi};$$

e questa relazione per effetto della (x) diviene

(3) $$\xi_n \backsimeq \frac{5}{12} nl_n \lambda^2$$

od anche, essendo P_n il perimetro dell'ennagono regolare:

(3') $$\xi_n \backsimeq \frac{5}{12} P_n \cdot \lambda^2$$

si ha dunque che

Il baricentro d'un arco di circolo che ha per corda il lato del poligono regolare inscritto di n *lati, dista dal centro del circolo per un segmento che è uguale, a meno d'una quantità praticamente trascurabile, ai $\frac{5}{12}$ del segmento minore del perimetro del poligono diviso in sezione aurea.*

D'altronde specificando il valore di n, s'ottengono enunciati talvolta eleganti e curiosi.

Così, se $n = 12$, la (3) fornisce:

$$\xi_{12} \backsimeq 5l_{12} \cdot \lambda^2$$

e mostra che *quando l'arco di circolo sottende il lato del dodecagono regolare inscritto in quel cerchio, il baricentro dell'arco dista dal centro del circolo per un segmento che è uguale con molta approssimazione a cinque volte il segmento minore del lato del poligono diviso in sezione aurea.*

4. La distanza σ del baricentro d'un settore circolare dal centro del circolo è data, com'è noto, dalla relazione $\sigma = \frac{2R \cdot C}{3A}$ dove A è la lunghezza dell'arco base, R il suo raggio, C la corda che sottende l'arco.

Qui considero settore circolare corrispondente ad un arco sotteso dalla corda uguale al lato d'un poligono regolare di n lati inscritto in quel cerchio. Allora si ha, conformemente al n. 3,

$$\sigma_n = \frac{2 \cdot nRl_n}{3 \cdot 2\pi R} = \frac{nl_n}{3\pi},$$

che, per effetto della (x) diviene

$$(4) \qquad \sigma_n \backsimeq \frac{5}{18} nl_n \lambda^2 \quad \text{od anche} \quad \sigma_n \backsimeq \frac{5}{18} P_n \cdot \lambda^2$$

che consente d'enunciare una proposizione generale conforme a quella del n. 3:

Il centro di gravità d'un settore circolare corrispondente ad un arco sotteso da una corda uguale al lato di un poligono regolare di n *lati inscritto in quel cerchio, dista dal centro del circolo per un segmento che è uguale, a meno d'una quantità praticamente trascurabile, ai* $\frac{5}{18}$ *del segmento minore del perimetro diviso in sezione aurea.*

Specificando il valore di n, si ha, ad esempio, $\sigma_{18} \backsimeq 5l_{18} \cdot \lambda^2$.