Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Ugo Broggi

Sulla funzione primitiva di una funzione razionale

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.4, p. 196–202.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_4_196_0>

Sulla funzione primitiva di una funzione razionale.

Nota di UGO BROGGI (a Milano).

Sunto - *Si dà una condizione necessaria e sufficiente perchè la funzione primitiva di una funzione razionale sia razionale. E l'espressione di un ramo uniforme della funzione primitiva, indipendente dalla determinazione delle radici del denominatore della funzione razionale.*

Sia

$$f(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$$
$$F(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

e, per mod x abbastanza grande

$$\Phi(x) = \frac{f(x)}{F(x)} = A_0 + A_1 x + \dots + A_{m-n} x^{m-n} + \frac{c_0}{x} + \frac{c_1}{x^2} + \dots$$

Ci proponiamo di dimostrare che condizione necessaria e sufficiente perchè la funzione primitiva di $\Phi(x)$ sia razionale è che sia

$$c_0 = 0,$$

$$a_1 \frac{c_k}{k} + 2a_2 \frac{c_{k+1}}{k+1} + \dots + na_n \frac{c_{k+n-1}}{k+n-1} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

e di dare un'espressione della primitiva (razionale o no) di $\Phi(x)$ indipendente dalla determinazione delle radici di $F(x)$.

È noto che se $a, b,\ldots$ sono le r radici distinte del polinomio $F(x)$, $\alpha, \beta,\ldots$ i loro ordini di moltiplicità, mentre

$$P = (x - a)^{\alpha - 1}(x - b)^{\beta - 1}\ldots$$
$$Q = (x - a)(x - b)\ldots$$

dato un polinomio $f(x)$ di grado m, si possono sempre determinare i polinomi Π, di grado $m - n$, N di grado $r - 1$ al più, M di grado $n - r - 1$ al più, per modo che sia

$$\Phi(x) = \frac{f(x)}{F(x)} = \Pi + \frac{N}{Q} + \frac{d}{dx}\left(\frac{M}{P}\right)$$

non solo, ma, come fu osservato da HERMITE, calcolare Π, N, M, P, Q senza risolvere l'equazione $F(x) = 0$. Ove sia $N \equiv 0$ la determinazione della funzione primitiva di $\Phi(x)$ può dunque venire resa indipendente dalla risoluzione dell'equazione $F(x) = 0$.

Se non è $N \equiv 0$ il metodo tradizionale di integrazione delle funzioni razionali, che risale al LEIBNITZ, solo trasforma il problema dell'integrazione in un altro, in generale non risolubile.

1. Supporremo $n > m$, e, poichè se $n - m = 1$ la funzione primitiva di $\Phi(x)$ non può essere razionale, $n - m > 1$.

$$\Phi(x) = \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3} + \ldots$$

osservando che le formole che danno la derivata n-^{esima} di una funzione di funzione permettono di esprimere il coefficiente c_n del termine generale dello sviluppo esplicitamente in funzione di

$$n,\ a_0,\ a_1, \ldots,\ a_n,\ b_0,\ b_1 \ldots,\ b_m.$$

E ricordiamo che la funzione intera

$$\varphi(t) = c_1 t + \frac{c_2}{2!} t^2 + \ldots$$

è la soluzione delle equazioni

$$\Phi(x) = \int_0^\infty e^{-tx}\varphi(t)dt$$

il secondo membro della quale converge in un certo semipiano $R(x) > \lambda$.

$$a_0 y + a_1 y' + \ldots + a_n y^{(n)} = 0$$
$$y_0 = 0; \quad y_0^{(r)} = c_r; \qquad (r = 1, 2, \ldots n - 1);$$

e che reciprocamente se $\varphi(t)$ è la soluzione di un'equazione differenziale lineare omogenea con coefficienti costanti

$$\int_0^\infty e^{-tx}\varphi(t)dt$$

rappresenta nel suo semipiano di convergenza una funzione razionale nulla all'infinito [1].

— $\Phi(x)$ è a sua volta la derivata della funzione

$$\Psi(x) = \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt = \int_0^\infty e^{-tx}\psi(t)dt$$

regolare nel semipiano $R(x) > \gamma$ e razionale, come lo è $\Phi(x)$, se la generatrice

$$\psi(t) = \frac{\varphi(t)}{t} = c_1 + \frac{c_2}{2!}t + \ldots$$

è soluzione di un'equazione differenziale lineare omogenea con coefficienti costanti. È, per la (1)

$$\begin{aligned} a_0\varphi(t) + \ldots + a_n\varphi^{(n)}(t) &= t(a_0\psi(t) + \ldots + a_n\psi^{(n)}(t)) + \\ &+ a_1\psi(t) + 2a_2\psi'(t) + \ldots + na_n\psi^{(n-1)}(t) = 0\,: \end{aligned} \tag{2}$$

la funzione generatrice $\psi(t)$ della determinante $\Psi(x)$ è la soluzione dell'equazione di LAPLACE

$$(a_1 + a_0t)y + (2a_2 + a_1t)y' + \ldots + (na_n + a_{n-1}t)y^{(n-1)} + ta_ny^{(n)} = 0$$

corrispondente alle condizioni

$$y_0 = c_1, \quad y_0' = \frac{c_2}{2}, \quad y_0'' = \frac{c_3}{3}, \ldots, \quad y_0^{(n-1)} = \frac{c_n}{n}.$$

Sia

$$\varphi(t) = A(t)e^{at} + B(t)e^{bt} + \ldots + D(t)e^{dt}$$

dove A, B,..., D sono polinomi in t. Se $\psi(t)$ è soluzione di un'equazione lineare omogenea con coefficienti costanti, e H, K,..., L sono polinomi in t, è pure

$$\psi(t) = H(t)e^{ht} + K(t)e^{kt} + \ldots + L(t)e^{lt}.$$

La (2) permette di escludere che ci possano essere valori h, k,..., l che non figurano fra gli a, b,..., d, valori a, b,..., d che non figurano fra gli h, k,..., l.

[1] Cfr. BROGGI, « Boll. Un. Mat. Ital. », IX, 5, pag. 270-278.

Ma se $\psi(t) = \frac{\varphi(t)}{t}$ ha la forma supposta, è anche

$$\psi(t) = \frac{A(t)}{t} e^{at} + \frac{B(t)}{t} e^{bt} + \dots + \frac{D(t)}{t} e^{dt}$$

dove $\frac{A(t)}{t}, \dots, \frac{D(t)}{t}$ sono polinomi in t, e $\psi(t)$, che evidentemente è soluzione di (1), non può non esserlo di

$$a_1 y + 2a_2 y' + \dots + na_n y^{(n-1)} = 0 \tag{3}$$

mentre è evidente, reciprocamente, che $\psi(t)$ non può essere soluzione di (3) senza esserlo di (1).

Si deduce senz'altro dalla (3) e da

$$\psi(t) = c_1 + \frac{c_2}{2!} t + \frac{c_3}{3!} t^2 + \dots$$

che, mentre $c_1, c_2, \dots$ coefficienti dello sviluppo in serie di una funzione razionale di denominatore

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

soddisfano la relazione ricorrente

$$a_0 c_k + a_1 c_{k+1} + \dots + a_n c_{k+n} = 0$$

la primitiva di $\Phi(x)$ non può essere razionale senza che sia

$$a_1 \frac{c_k}{k} + 2a_2 \frac{c_{k+1}}{k+1} + \dots + na_n \frac{c_{k+n-1}}{k+n-1} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \tag{4}$$

Reciprocamente: se $c_1, c_2, \dots$ soddisfano la (4), $\psi(t)$ è soluzione della (3) e la primitiva di $\Phi(t)$ è razionale.

2. $$\psi(t) = c_1 + \frac{c_2}{2!} t + \frac{c_3}{3!} t^2 + \dots$$

soluzione a un tempo, per la (2), delle due equazioni

$$a_0 y + a_1 y' + \dots + a_n y^{(n)} = 0$$

di caratteristica $F(x) = 0$

$$a_1 y + 2a_2 y' + \dots + na_n y^{(n-1)} = 0$$

di caratteristica $F'(x) = 0$, lo è parimenti dell'equazione di caratteristica

$$P(x) = 0$$

se $P(x)$ è il massimo comun divisore dei polinomi $F(x)$, $F'(x)$. Può pertanto determinarsi un polinomio $M(x)$, di grado inferiore al grado di $P(x)$ tale che

$$\frac{M(x)}{P(x)} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{2x^2} + \frac{c_3}{3x^3} + \dots$$

E poichè è anche, nel caso che qui si considera, e per valori abbastanza grandi di mod x

$$\int \Phi(x)dx = C - \frac{c_1}{x} - \frac{c_2}{2x^2} - \frac{c_3}{3x^3} - \dots$$

dove C è una costante arbitraria, se ne ha senz'altro

$$\int \Phi(x)dx = C - \frac{M(x)}{P(x)}.$$

Ma la determinazione effettiva di $P(x)$ appare superflua, a meno che si voglia ricondurre la funzione primitiva di $\Phi(x)$, supposta razionale, alla sua espressione più semplice.

Supposto $H(x)$ uguale ad uno dei tre polinomi $F(x)$, $F'(x)$, $P(x)$, la relazione

$$\frac{K(x)}{H(x)} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{2x^2} + \frac{c_3}{3x^3} + \dots$$

permette di determinare i coefficienti del polinomio $K(x)$, di grado minore del grado di $H(x)$, e di scrivere

$$\int \Phi(x)dx = C - \frac{K(x)}{H(x)}.$$

Ove poi sia

$$\varphi(t) = c_0 + \frac{c_1}{1!}t + \frac{c_2}{2!}t^2 + \dots$$

$$a_0c_k + a_1c_{k+1} + \dots + a_nc_{k+n} = 0,$$

$$a_1\frac{c_k}{k} + 2a_2\frac{c_{k+1}}{k+1} + \dots + na_n\frac{c_{k+n-1}}{k+n-1} = 0. \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

è anche, evidentemente

$$\int \Phi(x)dx = C + c_0 \log x - \frac{K(x)}{H(x)}$$

dove $\log x$ designa uno dei valori del logaritmo di x, reale, ad es., se lo è x.

3. Ci limitiamo più generalmente a postulare che c_1, c_2, c_3,..., soddisfino la relazione ricorrente

$$a_0c_k + a_1c_{k+1} + \dots + a_nc_{k+n} = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots).$$

Le due serie

$$\frac{c_1}{x^2}+\frac{c_2}{x^3}+\ldots,\quad \frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{2x^2}+\frac{c_3}{3x^3}+\ldots$$

convergono fuori dello stesso circolo. Il punto all'∞ è punto regolare della funzione razionale $\Phi(x)$ come di

$$\Psi(x)=\int_0^\infty e^{-tx}\psi(t)dt=\int_0^\infty e^{-tx}\left(c_1+\frac{c_2}{2!}t+\ldots\right)dt$$

$$=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{2x^2}+\ldots$$

che vi si annulla. Per un noto teorema di PINCHERLE [1], che afferma la sviluppabilità in serie di fattoriali di ogni funzione analitica regolare per $x=\infty$, $\Psi(x)$ è sviluppabile in una serie della forma

(5) $$\frac{b_1}{x}-\frac{b_2}{x(x+1)}+\frac{b_3}{x(x+1)(x+2)}-\ldots$$

dove

$$b_n=(-1)^n\sigma^{(n)}(1),\quad \sigma(t)=\psi(-\log t).$$

La serie (5) converge in un semipiano $R(x)>\mu$ nel quale

(6) $$c_0\log x-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{b_n}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}$$

definisce un ramo monodromo della funzione primitiva di $\Phi(x)$.

Il prolungamento analitico della serie di fattoriali (5), e pertanto del ramo uniforme di $\int\Phi(x)dx$ definito da (6), s'ottiene sommando la serie di fattoriali a mezzo dello sviluppo di $\Psi(x)$ in serie generalizzata di fattoriali

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_n}{(x+\rho)(x+\rho+1)\ldots(x+\rho+n)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e_n}{x(x+\omega)\ldots(x+n\omega)}$$

alla prima delle quali corrisponde un'ascissa di convergenza μ_ρ che per ρ positivo crescente tende in modo continuo e monotono verso un valore limite μ_∞, mentre l'ascissa di convergenza $\mu(\omega)$ della seconda tende per $\omega\to\infty$ verso un valore limite $\mu(\infty)$ tale che $\psi(x)$ è regolare in ogni punto del semipiano $R(x)>\mu(\infty)$ senza esserlo in ogni punto dell'altro $R(x)>\mu(\infty)-\varepsilon$, dove $\varepsilon>0$ e qualunque.

[1] Cfr. PINCHERLE, « Annales de l'Éc. Norm. Sup. », serie 3ª, 22, pag. 56.

L'estensione a tutta la stella nella quale può venire ottenuto un prolungamento uniforme e che è il piano x nel quale si sono effettuati dei tagli che a sinistra e parallelamente all'asse reale portano da ogni punto singolare all'infinito è dato dalla formola di MITTAG-LEFFLER

$$U(F(x)) = \lim_{\alpha \to 0} \int_0^\infty e^{-tx} \frac{f(t)}{\Gamma(1+\alpha t)} dt$$

che, data una funzione

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-tx} f(t) dt$$

sviluppabile in una serie di fattoriali definisce in una stella del tipo indicato il ramo uniforme $U(F(x))$ che può ottenersi a mezzo del prolungamento analitico di $F(x)$ [1].

E, nel caso che c'interessa

$$U(\Psi(x)) = \lim_{\alpha = 0} \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\psi(t)}{\Gamma(1+\alpha t)} dt ;$$

il problema della determinazione dell'integrale indefinito di $\Phi(x)$ appare trasformato in quello della determinazione del valore limite di un integrale definito improprio.

[1] Cfr. MITTAG-LEFFLER, « Acta Mathematica », 46, pag. 340.