BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

Maria Pastori

Le identità di Veblen nel calcolo assoluto generalizzato del Vitali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.4, p. 202–205.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_4_202_0>

Le identità di Veblen nel calcolo assoluto generalizzato del Vitali.

Nota di MARIA PASTORI (a Milano).

Sunto. - *Si dimostra che, per le derivate covarianti dei simboli di* RIEMANN *nel calcolo assoluto generalizzato del* VITALI, *valgono delle identità, che sono la più naturale estensione di quelle di* VEBLEN.

Si osserva che le identità di VEBLEN *sono equivalenti a quelle di* BIANCHI.

1. Le identità di Veblen. — Nell'ordinario calcolo differenziale assoluto le derivate covarianti dei simboli di RIEMANN soddisfano alle ben note identità di BIANCHI, che si ottengono assai facilmente ricorrendo a coordinate localmente geodetiche [2]. Con

[2] V. ad. es. T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*. Roma, Stock, 1925, p. 208 e segg.

lo stesso metodo si ottengono pure le seguenti identità, dovute a VEBLEN:

$$(1) \qquad (ph, qr)_s + (rh, ps)_q + (sh, rq)_p + (qh, sp)_r = 0 \text{ [1]}$$

nelle quali ogni termine si deduce dal precedente tenendo fisso l'indice h e facendo, sulla quaterna dei rimanenti indici la seguente sostituzione $\begin{pmatrix} 3^o & 1^o & 4^o & 2^o \\ 1^o & 2^o & 3^o & 4^o \end{pmatrix}$.

La validità delle identità di BIANCHI nel calcolo assoluto generalizzato, fu dimostrata dal prof. VITALI ricorrendo alla rappresentazione sintetica dei simboli di RIEMANN di classe ν:

$$(2) \qquad (\alpha, \beta;\ q, r) = \int_g f_{\alpha, q} f_{\beta, r}\, dt - \int_g f_{\alpha, r} f_{\beta, q}\, dt \text{ [2]}.$$

Seguendo il procedimento del prof. VITALI si possono pure dimostrare le seguenti identità, che sono un'immediata estensione delle (1):

$$(1') \qquad (\alpha' p, \beta;\ q, r)_s + (\alpha' r, \beta;\ p, s)_q + (\alpha' s, \beta;\ r, q)_p + (\alpha' q, \beta;\ s, p)_r = 0$$

dove α' è uno stato di $\nu - 1$ cifre, β di ν cifre e p, q, r, s sono indici di classe 1.

2. Dimostrazione diretta. — Per la (2) si ha, derivando covariantemente:

$$(\alpha' p, \beta;\ q, r)_s = \int_g f_{\alpha' p, q, s} f_{\beta, r}\, dt + \int_g f_{\alpha' p, q} f_{\beta, r, s}\, dt -$$
$$- \int_g f_{\alpha' p, r, s} f_{\beta, q}\, dt - \int_g f_{\alpha' p, r} f_{\beta, q, s}\, dt.$$

[1] O. VEBLEN, *Normal coordinates for the geometry of paths.* « Proc. of the Nat. Ac. of Sciences », vol. 8, n. 7, 1922, pp. 192-197. V. pure L. P. EISENHART, *Non-riemannian geometry.* « Amer. Math. Society Colloquium Publications », vol. VIII, New-York, 1927. p. 56.

Qui e nel seguito gli indici posti al piede dei simboli di RIEMANN sono indici di derivazione covariante.

[2] G. VITALI, *Le identità di Bianchi per i simboli di Riemann nel calcolo assoluto generalizzato.* « Rend. R. Acc. dei Lincei », vol. IX, serie 6ª, 1° sem. 1929, pp. 190-192. V. pure dello stesso Autore, *Geometria nello spazio Hilbertiano.* Bologna, Zanichelli, 1929, pp. 207-208.

D'ora in avanti considero sempre simboli di RIEMANN di classe ν, e tralascio di mettere l'indice ν per semplicità di scrittura.

Mediante questa formola e le analoghe, il primo membro di (1′) si trasforma in una somma di 8 termini, di cui 4 sono del tipo:

a) $$\int_g f_{\alpha' p, q}(f_{\beta, r, s} - f_{\beta, s, r})\, dt.$$

e gli altri 4 del tipo

b) $$\int_g (f_{\alpha' p, q, s} - f_{\alpha' s, q, p}) f_{\beta, r}\, dt.$$

I 4 del tipo a), come ha osservato il prof. VITALI, sono nulli; ma anche i 4 del tipo b) sono nulli. Si ha infatti:

$$f_{\alpha' q, p, s} - f_{\alpha' q, s, p} = \Sigma_\gamma f_\gamma [\alpha' q, \gamma;\ s, p] \text{ [1]}.$$

Ma, per la simmetria del $(\nu + 1)$–esimo ricciano di un invariante rispetto ai suoi indici, si può nel primo membro della precedente, sostituire al primo termine $f_{\alpha' p, q, s}$ e al secondo $f_{\alpha' s, q, p}$. Si ha quindi, per i termini del tipo b):

$$\Sigma_\gamma [\alpha' q, \gamma;\ s, p] \int_g f_\gamma f_{\beta, r}\, dt = 0 \text{ [2]}.$$

3. **Equivalenza alle identità di Bianchi.** — Le (1′) si possono pure dedurre dalle identità di BIANCHI. Scrivendo infatti le identità di BIANCHI per ciascun termine di (1′) si ha:

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &(\alpha' p, \beta;\ q, r)_s + (\alpha' p, \beta;\ r, s)_q + (\alpha' p, \beta;\ s, q)_r = 0,\\ &(\alpha' r, \beta;\ p, s)_q + (\alpha' r, \beta;\ s, q)_p + (\alpha' r, \beta;\ q, p)_s = 0,\\ &(\alpha' s, \beta;\ r, q)_p + (\alpha' s, \beta;\ q, p)_r + (\alpha' s, \beta;\ p, r)_q = 0,\\ &(\alpha' q, \beta;\ s, p)_r + (\alpha' q, \beta;\ p, r)_s + (\alpha' q, \beta;\ r, s)_p = 0 \text{ [3]}.\end{aligned}\right.$$

Se si sommano membro a membro queste identità, e si applica la regola di derivazione covariante di una somma, il primo membro si riduce alla somma di 4 termini del tipo:

$$(4)\qquad [(\alpha' p, \beta;\ q, r) + (\alpha' r, \beta;\ q, p) + (\alpha' q, \beta;\ p, r)]_s.$$

Quest'ultimo, per la proprietà ciclica dei simboli di RIEMANN [4], diviene:

$$[(\alpha' p, \beta;\ q, r) - (\alpha' p, \beta;\ r, q)]_s = 2(\alpha' p, \beta;\ q, r)_s.$$

[1] G. VITALI, loco secondo cit., p. 207, form. (5).

[2] G. VITALI, loco secondo cit., pp. 201-202.

[3] Come si vede dai secondi membri delle (3), il gruppo di identità di BIANCHI scritte, corrisponde alla permutazione circolare degli indici p, r, s, q.

[4] G. VITALI, loco secondo cit., p. 203, teor. 4.

Operando in modo analogo per gli altri termini e dividendo per 2, si hanno appunto le (1').

Viceversa dalle (1') si possono ricavare in modo analogo le identità di BIANCHI.

Scrivendo infatti le identità di VEBLEN per ciascun termine della prima delle (3), si ha:

$$(\alpha' p, \beta;\ q, r)_s + (\alpha' r, \beta;\ p, s)_q + (\alpha' s, \beta;\ r, q)_p + (\alpha' q, \beta;\ s, p)_r = 0.$$
$$(\alpha' p, \beta;\ r, s)_q + (\alpha' s, \beta;\ p, q)_r + (\alpha' q, \beta;\ s, r)_p + (\alpha' r, \beta;\ q, p)_s = 0.$$
$$(\alpha' p, \beta;\ s, q)_r + (\alpha' q, \beta;\ p, r)_s + (\alpha' r, \beta;\ q, s)_p + (\alpha' s, \beta;\ r, p)_q = 0.$$

Sommando membro a membro e osservando che, per la proprietà ciclica dei simboli di RIEMANN, la somma dei tre termini che occupano i terzi posti è nulla, si ottiene nel primo membro una somma di tre termini del tipo (4). Operando come precedentemente, si ha appunto la prima delle (3).

Le identità di BIANCHI e di VEBLEN sono dunque equivalenti.

Questa osservazione vale naturalmente anche per i simboli di RIEMANN ordinari.