Bollettino Unione Matematica Italiana

Radu Bădescu

Sull'equazione di Fredholm nel campo complesso

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.4, p. 217–221.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_4_217_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1931.

Sull'equazione di Fredholm nel campo complesso.

Nota di RADU BADESCU (Cluj - Romenia).

L'equazione di seconda specie di FREDHOLM, che oggigiorno è divenuta classica in virtù delle sue numerose applicazioni, può essere estesa anche nel dominio complesso. Essa si può scrivere sotto la forma, $\Phi(z)$ essendo la funzione incognita,

$$(1) \qquad \Phi(z) - \lambda \int_{(C)} K(z, s)\Phi(s)ds = \Psi(z)$$

dove l'integrale è estesa ad un arco continuo di curva C, chiuso o no. In quest'equazione, $K(z, s)$ e $\Psi(z)$ sono funzioni date, regolari sul dominio *chiuso* D, limitato dalla curva C nel primo caso, o contenente l'arco C nel secondo caso, ciò qualunque sia s sulla C per il nucleo $K(z, s)$. Il caso dell'arco aperto C può essere ricondotto a quello classico di FREDHOLM, effettuando un cambiamento sulla variabile s, $s = H(t)$, tale che all'arco C corrisponda univocamente il segmento $(0, 1)$ dell'asse reale. La funzione $H(t)$ essendo supposta olomorfa su questo segmento, sarà altrettanto della funzione $K[z, H(t)]$. Possiamo allora introdurre una nuova variabile u definita dalla relazione $z = H(u)$, e ponendo

$$\Phi[H(u)] = \Phi_1(u)$$

dove $\Phi_1(u)$ è la nuova funzione incognita, saremo condotti all'equazione di FREDHOLM

$$\Phi_1(u) - \lambda \int_0^1 \{ K[H(u), H(t)] \cdot H'(t) \} \Phi_1(t) dt = \Psi[H(u)]$$

per la quale i tre teoremi già stabiliti da quell'Autore sono validi.

Il caso di una curva chiusa C è più complicato perchè, se il nucleo $K(z, s)$ è olomorfo in s sul dominio D, qualunque sia z appartenente a questo dominio, l'integrale del primo membro della (1) è nulla, e allora la risoluzione dell'equazione (1) diventa illusoria. Dobbiamo quindi supporre che il nucleo $K(z, s)$ ammette certe singolarità nell'interno di C, pur essendo olomorfo quando z ed s vengono sulla curva C, ed è precisamente la scelta di queste singolarità che rende il problema così difficile.

Nel Dicembre 1929 [1] abbiamo studiato un'equazione funzionale che si presenta nel problema del GOURSAT relativo alle equazioni con derivate parziali di second'ordine, del tipo iperbolico: in un caso particolare che è stato oggetto di alcune nostre Note [2], tale equazione si può mettere sotto la forma (1) utilizzando l'integrale di CAUCHY. Soltanto nel Luglio del 1931 abbiamo preso conoscenza di due articoli dovuti ai sig.ri PINCHERLE e CINQUINI [3] nei quali essi studiano delle equazioni integrali della forma (1), C essendo una curva chiusa. I metodi applicati da questi Autori differiscono essenzialmente dal nostro; essi conservano un carattere *locale* dal quale cercheremo di liberarci utilizzando le ricerche ben note dei sig.ri FATOU e JULIA [4] sul problema generale dell'iterazione, ricerche, d'altronde, posteriori a quelle del sig. PINCHERLE.

In questa Nota vogliamo estendere i teoremi classici del FREDHOLM ad una classe assai generale di equazioni integrali del tipo (1), che comprende anche le equazioni considerate dal PINCHERLE o dal CINQUINI.

(1) « Académie Royale de Belgique », 5-ème série, t. XV, pag. 1062 et suivants.

(2) « Comptes Rendus », Paris, t. 191, pages 428 et 480.

(3) S. PINCHERLE, « Rendiconti Acc. Scienze », Bologna, 1915-16, vol. XX e S. CINQUINI, « Bollettino Unione Matematica Italiana », anno IX, n. 2, 1930, pag. 63.

(4) Voir G. JULIA, « Journal de Liouville », 8-ème série, tomo 1, 1918, pag. 47.

Consideriamo i seguenti nuclei

$$(2)\qquad K(z, s) = \frac{1}{2\pi i}\left\{ \sum_{p=0}^{m_1} \frac{K_{1,p}(z, s)}{[s - \theta_1(z)]^{p+1}} + \sum_{p=0}^{m_2} \frac{K_{2,p}(z, s)}{[s - \theta_2(z)]^{p+1}} + \right.$$

$$\left. + \ldots + \sum_{p=0}^{m_r} \frac{K_{r,p}(z, s)}{[s - \theta_r(z)]^{p+1}} \right\}$$

dove le $\theta_j(z)$ sono delle funzioni razionali, olomorfe su tutto il dominio chiuso D, limitato dalla curva C, e tali che le trasformazioni

$$(3)\qquad z_j = \theta_j(z) \qquad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

ammettano un solo punto attrattivo ζ sul D. Supponendo tutti i moltiplicatori $\theta_j'(\zeta)$ distinti dallo zero, avremo

$$\theta_j(\zeta) = \zeta, \quad 0 < |\theta_j'(\zeta)| < 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, r).$$

In quanto alle funzioni $K_{j,p}(z, s)$, noi le supporremo, per il momento, continue rispetto ad s sulla curva C.

Siano D_j i dominii immediati d'attrazione relativi a ζ, che corrispondono alle trasformazioni (3). Questi dominii hanno una parte comune semplicemente connessa Δ, contenente il punto ζ e appartenente a D. Supporremo nel seguito che la curva C appartenga interamente al dominio Δ e che tutte le curve C_j ottenute applicando alla C ciascuna delle trasformazioni (3), siano completamente interne alla C. Il punto ζ sarà allora anch'esso interno alla C.

In queste condizioni, perchè l'integrale di $K(z, s)$ presa lungo la C, abbia un senso, bisognerà supporre che le funzioni $K_{j,p}(z, s)$ siano olomorfe rispetto a z sul D e rispetto ad s sul dominio chiuso Δ_j, limitato dalla curva corrispondente C_j (1).

Le ipotesi fatte non sono troppo restrittive, specialmente l'ipotesi che ζ sia un punto fisso per tutte le trasformazioni (3). Infatti, supponiamo che ciò non sia e che $\theta_1(z)$ ammetta un punto ζ_1, interno alla C, come punto fisso. In questa ipotesi però, i termini di $K(z, s)$ che contengono $\theta_1(z)$ al denominatore, possono diventare infiniti su C, ciò che ci obbligherà a deformare la curva C per lasciare all'esterno il punto ζ_1. E anche in questo caso non si può parlare d'unicità della soluzione.

(1) Queste funzioni sono anche olomorfe rispetto all'insieme delle due variabili sul Δ_j.

Precisati questi punti, sostituiamo nell'equazione (1) il nucleo $K(z, s)$ con la sua espressione (2). Integrando termine a termine le somme che vi figurano e tenendo conto della formola classica

$$F^{(p)}(x) = \frac{p!}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{F(s)ds}{(s-x)^{p+1}}$$

avremo

$$\Phi(z) - \lambda\left\{ \sum_{p=0}^{m_1} \frac{1}{p!}\left[\frac{\partial^p[K_{1,p}(z, s)\Phi(s)]}{\partial s^p}\right]_{s=\theta_1(z)} + \right.$$
$$\left. + \ldots + \sum_{p=0}^{m_r} \frac{1}{p!}\left[\frac{\partial^p[K_{r,p}(z, s)\Phi(s)]}{\partial s^p}\right]_{s=\theta_r(z)} \right\} = \Psi(z)$$

ossia, ordinando secondo le derivate crescenti di $\Phi(z)$, otterremo un'equazione funzionale della forma

$$(4) \quad \Phi(z) - \lambda\left\{ \sum_{p=0}^{m_1} \Gamma_{1,p}(z)\Phi^{(p)}[\theta_1(z)] + \ldots + \sum_{p=0}^{m_r} \Gamma_{r,p}(z)\Phi^{(p)}[\theta_r(z)] \right\} = \Psi(z).$$

Le espressioni delle nuove funzioni $\Gamma_{j,p}(z)$ sono date dalla relazione

$$\Gamma_{j,p}(z) = \sum_{q=p}^{m_j} \frac{1}{(q-p)!\ p!} K_{j,q}^{(q-p)}[z, \theta_j(z)]$$

dove $K_{j,q}^{(p)}(z, s)$ è la p-^{sima} derivata di $K_{j,q}(z, s)$ rispetto ad s.

Per poter estendere la proprietà dell'unicità alla soluzione uniforme $\Phi(z)$ dell'equazione (1) rispettivamente intorno all'origine del piano λ e al punto ζ, bisognerà supporre che le funzioni $\Gamma_{j,p}(z)$ (le quali sono evidentemente olomorfe su D), ammettono degli sviluppi tayloriani intorno al punto ζ, analoghi a quelli del Cinquini,

$$\Gamma_{j,p}(z) = \frac{1}{p!}\sum_{q=p}^{\infty} \gamma_{p,q}^{(j)}(z-\zeta)^q.$$

In queste condizioni la funzione determinante di Fredholm $D(\lambda)$, funzione intera di λ, ammette come zeri i punti della successione

$$\lambda_i = \frac{1}{\displaystyle\sum_{p=0}^{m_1} \frac{i(i-1)\ldots(i-p+1)}{p!}[\theta_1'(\zeta)]^{i-p}\gamma_{p,p}^{(1)} + \ldots + \sum_{p=0}^{m_r} \frac{i\ldots(i-p+1)}{p!}[\theta_r'(\zeta)]^{i-p}\gamma_{p,p}^{(r)}}$$

$$(i = 0, 1 \ldots)$$

in cui supponiamo implicitamente che, se i è inferiore a m_j, la somma corrispondente $\sum_{p=0}^{m_j}$ sarà sostituita da $\sum_{p=0}^{i}$, tutti gli altri termini venendo a sparire dall'espressione di λ_i. Questo risultato può essere ottenuto utilizzando le ricerche del CINQUINI e osservando che l'operazione effettuata su $\Phi(z)$ nella parentesi del primo membro della (4), è lineare rispetto alle somme $\sum_{p=0}^{m_j}$ che definiscono delle operazioni analoghe a quelle del CINQUINI. Si può, del resto, giungere agli stessi risultati, applicando all'equazione (4) il metodo adoperato da noi nelle Note citate con ([1]) e ([2]) nella pagina 218.

Possiamo ancora estendere i teoremi classici del FREDHOLM a delle categorie più generali d'equazioni integrali del tipo (1), per le quali i nuclei $K(z, s)$ sarebbero rappresentati da serie uniformemente convergenti in z ed s rispettivamente su D e Δ_j, serie dedotte dalla (2) facendo tendere verso l'infinito uno almeno degli m_j oppure l'indice r. Bisognerà perciò fare certe ipotesi supplementari sulla convergenza di tali serie o sulle funzioni $\theta_j(z)$.

In un'altro articolo ritorneremo su tutte queste questioni come pure su una generalizzazione dell'equazione (4), generalizzazione che permette di fare uno studio più largo delle soluzioni corrispondenti, non solo nella vicinanza di un punto fisso attrattivo, bensì anche intorno a dei punti misti e ripulsivi. Va osservato che il metodo adoperato da noi si presta anche nel caso dei cicli ([1]).

Possiamo ottenere lo stesso risultato se al posto del piano z introduciamo la sfera del RIEMANN, le funzioni $\theta_j(z)$ essendo soltanto razionali sul D.

([1]) Veggasi la nostra ultima Nota nei « Comptes Rendus », Paris, vol. 192, pag. 599.