Bollettino Unione Matematica Italiana

Alessandro Terracini

Su una classe di curve dello spazio a quattro dimensioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.4, p. 224–230.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_4_224_0>

Su una classe di curve dello spazio a quattro dimensioni.

Nota di ALESSANDRO TERRACINI (a Torino).

Sunto. - *In questa Nota si studiano alcune curve dello spazio a quattro dimensioni che, in un certo senso, sono analoghe alle curve dello spazio ordinario, le cui tangenti appartengono a un complesso lineare.*

1. In una mia ricerca: *Sulla riducibilità di alcune particolari corrispondenze algebriche,* attualmente in corso di stampa, mi si è presentata una classe di curve dello spazio a quattro dimensioni: intorno a questa classe di curve vorrei fare, nella presente Nota, alcune osservazioni. Le curve C in questione sono definite come segue: in uno spazio a quattro dimensioni S_4 consideriamo una retta fissa m e un piano fisso π non incidenti: per la curva C si domanda che la retta r condotta per ogni suo punto (x) a incontrare la retta fissa m e il piano fisso π giaccia costantemente entro il relativo iperpiano osculatore (ξ). Osserviamo subito che una tale curva soddisfa anche contemporaneamente alla proprietà duale, perchè il piano congiungente la retta r con la retta $(\xi)\cdot\pi$ ha, rispetto alla stessa curva C, un comportamento duale rispetto a quello della retta r (cosicchè a partire da ogni curva C, la curva duale ne fornisce già subito un'altra, che in generale è proiettivamente distinta da essa).

Le curve che soddisfano a una definizione analoga nello spazio ordinario sono quelle tali che per ogni punto della curva, entro il relativo piano osculatore, passa una retta appartenente a una conguenza lineare generale fissa; ora tali curve, come è ben noto, non sono altro che le curve appartenenti a un complesso lineare (contenente la congruenza lineare fissa). Ma, come vedremo, nello S_4 le cose procedono altrimenti.

Assumiamo la piramide di riferimento per le coordinate proiettive x_i di punto e ξ_i di iperpiano ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) in modo che i vertici A_1 e A_2 stiano sulla retta fissa m, e i rimanenti vertici A_3, A_4, A_5 stiano invece sul piano fisso π. Se lungo la curva cercata le coordinate di punto si esprimono in funzione di un parametro t mediante le formole $x_i = x_i(t)$, ecc., posto $x_i' = \dfrac{dx_i}{dt}$ ecc., la condizione a cui deve soddisfare la curva C è evidentemente

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & o & o & o \\ o & o & x_3(t) & x_4(t) & x_5(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & x_3'(t) & x_4'(t) & x_5'(t) \\ x_1''(t) & x_2''(t) & x_3''(t) & x_4''(t) & x_5''(t) \\ x_1'''(t) & x_2'''(t) & x_3'''(t) & x_4'''(t) & x_5'''(t) \end{vmatrix} = o.$$

Assumendo $x_2 = 1$, e il parametro t eguale a x_1, la (1) diventa

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} x_3(t) & x_4(t) & x_5(t) \\ x_3''(t) & x_4''(t) & x_5''(t) \\ x_3'''(t) & x_4'''(t) & x_5'''(t) \end{vmatrix} = o.$$

Assumendo sempre $x_2 = 1$, ma lasciando arbitraria la scelta del parametro t, la (1) si scrive invece

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} o & x_3(t) & x_4(t) & x_5(t) \\ r & x_3'(t) & x_4'(t) & x_5'(t) \\ r' & x_3''(t) & x_4''(t) & x_5''(t) \\ r'' & x_3'''(t) & x_4'''(t) & x_5'''(t) \end{vmatrix} = o,$$

dove $r = x_1'(t)$.

In base a una qualunque di queste equazioni. p. es. alla (1), la determinazione di tutte le curve C si riconduce a quadrature: invero, considerando la (1) come un'equazione differenziale lineare nella funzione incognita $x_5(t)$, mentre le rimanenti funzioni $x_i(t)$ siano date, la conoscenza dei due integrali particolari $x_5(t) = x_3(t)$ e $x_5(t) = x_4(t)$ permette appunto di ottenere l'integrale generale mediante quadrature.

Geometricamente, può avere interesse la caratterizzazione delle curve in questione dal punto di vista della geometria della retta. Ora, posto p. es. $(xx')_{12} = x_1x_2' - x_2x_1'$, la relazione (1) si trasforma nella

$$
(4) \qquad \begin{vmatrix} (xx')_{12} & (xx')_{45} & (xx')_{53} & (xx')_{34} \\ (xx'')_{12} & (xx'')_{45} & (xx'')_{53} & (xx'')_{34} \\ (xx''')_{12} & (xx''')_{45} & (xx''')_{53} & (xx''')_{34} \\ (x'x'')_{12} & (x'x'')_{45} & (x'x'')_{53} & (x'x'')_{34} \end{vmatrix} = 0.
$$

Infatti, visto che la (4) è invariante rispetto ai cambiamenti del parametro t, si può fare $t = x_1$, $x_2 = 1$: la (4) così particolarizzata, in base a considerazioni ovvie di geometria analitica elementare, e tenuto conto che il wronskiano delle tre funzioni $x_3(t)$, $x_4(t)$, $x_5(t)$ non è identicamente nullo, equivale alla (2). In base alla (4) la caratterizzazione cercata è questa [1]: *per ogni punto* P *della curva* C *consideriamo il* [2] *complesso lineare di rette che contiene la retta tangente in* P, *insieme con altre due rette tangenti consecutive, e con tutte le rette appoggiate alla retta fissa* **m** *e al piano fisso* π: *ebbene, il piano osculatore alla curva* C *nel punto* P *contiene sempre il centro di questo complesso* [3].

2. Ma il fatto più notevole relativamente alle curve C sembra risiedere nella seguente trasformazione a cui esse dànno luogo.

[1] Ricordiamo che nello spazio a quattro dimensioni un complesso lineare di rette è formato dalle rette contenute nei piani che da un punto fisso (*centro* del complesso) proiettano un ordinario complesso lineare di rette di uno spazio a tre dimensioni.

[2] Questo complesso è unico. Invero, se ne esistessero infiniti, a ciascuno di essi si applicherebbe questo risultato: d'altro lato ne seguirebbe l'appartenenza di tutte le rette tangenti della curva C a complessi lineari fissi contenenti altresì tutte le rette appoggiate alla retta m e al piano π, il che, come osserviamo nella nota seguente, non è possibile.

[3] Perciò non possono le rette tangenti della curva C appartenere a un complesso lineare fisso, contenente tutte le rette appoggiate a m e a π: se no, i piani osculatori della C passerebbero per un punto fisso.

Facciamo per le coordinate di punto, e risp. di iperpiano, $x_2 = 1$, $\xi_1 = 1$; e osserviamo che fra le coordinate di un punto (x) della curva C e le coordinate ξ_i dell'iperpiano ivi osculatore intercedono allora le relazioni

$$\xi_2 = -x_1 \tag{5}$$

$$\xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 + \xi_5 x_5 = 0 \tag{6}$$

$$\left\{\begin{aligned} r + \xi_3 x_3' + \xi_4 x_4' + \xi_5 x_5' &= 0 \\ r' + \xi_3 x_3'' + \xi_4 x_4'' + \xi_5 x_5'' &= 0 \\ r'' + \xi_3 x_3''' + \xi_4 x_4''' + \xi_5 x_5''' &= 0. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Alle (7) si possono sostituire le

$$\left\{\begin{aligned} \xi_3' x_3 + \xi_4' x_4 + \xi_5' x_5 &= r \\ \xi_3' x_3' + \xi_4' x_4' + \xi_5' x_5' &= 0 \\ \xi_3' x_3'' + \xi_4' x_4'' + \xi_5' x_5'' &= 0. \end{aligned}\right. \tag{7'}$$

Ora, in virtù della (6), le sei quantità x_3, x_4, x_5, ξ_3, ξ_4, ξ_5, in ordine opportuno, si possono interpretare, in uno S_3 ausiliario, come coordinate p. es. radiali omogenee di una retta. Questa, al variare di t, descrive una rigata che la seconda fra le (7') dice essere una sviluppabile (non cono, nè piana, come si vede subito). Adunque, introducendo in quello S_3 coordinate proiettive non omogenee, p. es. di punto, X_3, X_4, X_5, la rappresentazione parametrica dello spigolo di regresso della sviluppabile porta a introdurre tre funzioni di t, e siano $X_3(t)$, $X_4(t)$, $X_5(t)$, tali che

$$\left\{\begin{aligned} Rx_3 &= X_3', \\ Rx_4 &= X_4', \\ Rx_5 &= X_5', \end{aligned}\right. \tag{8} \qquad \left\{\begin{aligned} R\xi_3 &= (XX')_{45}, \\ R\xi_4 &= (XX')_{53}, \\ R\xi_5 &= (XX')_{34}, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

dove $R(t)$ è un fattore di proporzionalità. Dobbiamo ancora tradurre la prima e l'ultima (7') mediante le funzioni X. Quelle due formole dànno risp.

$$W(X_3, X_4, X_5) = -R^2 r, \tag{10}$$

— designando col primo membro della (10) il wronskiano delle tre funzioni $X_3(t)$, $X_4(t)$, $X_5(t)$ —, e

$$\begin{vmatrix} o & X_3 & X_4 & X_5 \\ R & X_3' & X_4' & X_5' \\ R' & X_3'' & X_2'' & X_5'' \\ R'' & X_3''' & X_4''' & X_5''' \end{vmatrix} = o. \tag{11}$$

La (11) è dello stesso tipo (3), salva la sostituzione delle lettere maiuscole alle minuscole, e conduce così a una nuova soluzione del problema $\left(\text{anzi, a } \infty^1 \text{ curve } C, \text{ data la costante arbitraria che si introduce nell'integrale } X_1 = \int R dt\right)$. *Le* (8), (9) *dànno dunque una trasformazione delle soluzioni della* (1): *in questa trasformazione vale inoltre la* (10) [1]. L'espressione esplicita delle $X_3(t)$, $X_4(t)$, $X_5(t)$ risulta

$$X_3 = \frac{x_3\xi_4' - \xi_4 x_3'}{(xx')_{53}} = \frac{\xi_5' x_3 - x_3'\xi_5}{(xx')_{34}},$$

$$X_4 = \frac{x_4\xi_5' - \xi_5 x_4'}{(xx')_{34}} = \frac{\xi_3' x_4 - x_4'\xi_3}{(xx')_{45}},$$

$$X_5 = \frac{x_5\xi_3' - \xi_3 x_5'}{(xx')_{45}} = \frac{\xi_4' x_5 - x_5'\xi_4}{(xx')_{53}},$$

mentre R si ha poi da una qualunque fra le (8), o (9).

Anzichè le (8), (9), si possono fra la curva C e un'altra analoga $\bar{C}$ prefissare le formole di trasformazione un pò più generali

$$(8') \quad \begin{cases} S x_3 = \bar{x}_3' , \\ S x_4 = \bar{x}_4' , \\ S x_5 = \bar{x}_5' , \end{cases} \qquad (9') \quad \begin{cases} T\xi_3 = (\bar{x}\,\bar{x}')_{45} , \\ T\xi_4 = (\bar{x}\,\bar{x}')_{53} , \\ T\xi_5 = (\bar{x}\,\bar{x}')_{34} , \end{cases}$$

dove S, T sono funzioni di t da determinarsi: cercando $\bar{x}_3$, $\bar{x}_4$, $\bar{x}_5$, si trova facilmente p. es.

$$\bar{x}_5 = \tau X_5 + \tau' \frac{x_5\xi_3}{(xx')_{45}} = \tau X_5 + \tau' \frac{x_5\xi_4}{(xx')_{53}},$$

dove $\tau = T : S$. Ora si può supporre senza alcuna restrizione che i coefficienti di τ' in queste due espressioni siano disuguali, cosicchè $\tau' = o$; e le (8'), (9') — conservando per R lo stesso valore di sopra, o anche moltiplicandolo per una inessenziale costante arbitraria n — conducono per la trasformazione cercata alle formole

$$(12) \qquad \bar{x}_3 = \tau X_3, \quad \bar{x}_4 = \tau X_4, \quad \bar{x}_5 = \tau X_5, \quad \bar{r} = nR$$

con τ costante, dove i valori di X_3, X_4, X_5 sono quelli sopra determinati. Per la nuova trasformazione la (10) diventa

$$(10') \qquad W(\bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5) = -\frac{\tau^3}{n^2}\bar{r}^2 r.$$

[1] Considerando la (11) come un'equazione differenziale nella funzione incognita $R(t)$, e designando allora con $R_0(t)$ l'integrale particolare $R(t)$ considerato nel testo, l'integrale generale risulta $R = (h_0 + h_1 x_1)R_0$, con h_0, h_1 costanti arbitrarie.

3. Prima di passare all'interpretazione geometrica, notiamo ancora un'altra formola: anzitutto le (9) permettono di porre

(13) $$X_3 = U(t)(\xi\xi')_{45}, \quad X_4 = U(t)(\xi\xi')_{53}, \quad X_5 = U(t)(\xi\xi')_{34},$$

dove $U(t)$ è una funzione da determinarsi; e allora le (8) dànno

$$R = U^2 W(\xi_3, \xi_4, \xi_5).$$

D'altro lato la prima delle (7) diventa

$$Rr = -UW(\xi_3, \xi_4, \xi_5),$$

cosicchè

(14) $$Rr^2 = W(\xi_3, \xi_4, \xi_5).$$

Paragonando con (10'), risulta fra la curva C iniziale e la curva $\overline{C}$ trasformata la relazione

(15) $$\frac{W(x_3, x_4, x_5)}{x_1'} = \frac{\tau^3}{n}\,\frac{W(\xi_3, \xi_4, \xi_5)}{\xi_2'}.$$

Osserviamo ora che, fissati nello S_4 una retta m, un piano π (non incidente ad essa) e un iperpiano χ passante per π, coi quali, come è possibile in infiniti modi, facciamo coincidere risp. lo spigolo A_1A_2, il piano $A_3A_4A_5$ e la faccia $A_1A_3A_4A_5$ della piramide di riferimento, avendosi due curve qualsiansi riferite fra loro C e C^* rappresentate parametricamente l'una come inviluppo e l'altra come luogo dalle

$$\xi_i = \xi_i(t), \quad x_i^* = x_i^*(t), \quad (\xi_1 = x_2^* = 1),$$

l'espressione

(16) $$\frac{W(x_3^*, x_4^*, x_5^*)}{x_1^{*\prime}} : \frac{W(\xi_3, \xi_4, \xi_5)}{\xi_2'}$$

risulta invariabile rispetto ai cambiamenti del parametro t, e si altera solamente per un fattore costante al variare del sistema di riferimento [5], purchè questo si trovi nelle condizioni ora dette.

[5] Precisamente, eseguendo sulle coordinate x_i di punto la sostituzione lineare

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}, & x_2 = y_2 = 1 \\ x_i = a_{i3}y_3 + a_{i4}y_4 + a_{i5}y_5 & (i = 3, 4, 5) \end{cases}$$

il nuovo valore dell'espressione (16) si desume da quello originario moltiplicandolo per

$$a_{11}^3 : \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}^2.$$

Questa espressione non è poi che il prodotto di alcuni dei consueti *invarianti assoluti* relativi alla sostituzione lineare considerata.

rispetto agli elementi fissi m, π, χ. Perciò diciamo brevemente che (16) *è un invariante simultaneo relativo* delle coppie di punti corrispondenti delle curve C e C^*. Il rapporto di due espressioni (16) è dunque un *carattere geometrico proiettivo (invariante assoluto)* degli elementi di curve a cui quelle espressioni si riferiscono, insieme con la retta m, il piano π e l'iperpiano χ.

Ciò posto, concludiamo: *sia data una curva* C *della classe studiata in questa Nota, insieme con la retta fissa* m *e il piano fisso* π. *Fissiamo in modo arbitrario un iperpiano* χ *passante per* π. *Esistono allora* (6) ∞^3 *altre curve della medesima classe* C, *relative alla stessa retta fissa* m *e allo stesso piano fisso* π, *riferite alla curva iniziale, ciascuna delle quali, e sia* C, *soddisfa alle seguenti condizioni:*

chiamando P *e* P *due punti corrispondenti delle due curve,* 1) P *si proietta dalla retta* m *sul piano* π *nello stesso punto che è traccia, su questo piano, del piano osculatore alla* C *in* P; *o, ciò che è lo stesso, la retta tangente alla curva* C *in* P *si proietta nella retta traccia dello* S_3 *osculatore alla curva* C *nel punto* P — *la quale traccia contiene il punto* P_0 *proiezione di* P *eseguita da* m *su* π —; 2) *il punto dove la retta tangente in* P *ora nominata incontra l'iperpiano fisso* χ *si proietta proprio nel punto* P_0 (7); 3) *l'invariante relativo* (16) *calcolato per punti corrispondenti delle curve* C *e* C *è costante lungo queste due curve* (8).

(6) Dipendentemente dalle costanti arbitrarie τ e u che compaiono nelle (12) e dalla costante di integrazione in x, $\int r\,dt$.

(7) Le condizioni 1) e 2) traducono evidentemente le (9'), (8').

(8) È manifesta l'analogia della condizione 3), da noi qui enunciata per convenienti coppie di curve C, con la relazione che si ha nello spazio ordinario per le singole curve ivi in questione (appartenenti a un complesso lineare contenente la congruenza lineare fissa, come si è detto in principio della Nota), dove con posizioni analoghe a quelle qui adottate risulta già costante l'espressione analoga p. es. al numeratore della (16).