BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

LETTERIO LABOCCETTA

Sul prolungamento o completamento delle funzioni di variabile reale

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.5, p. 259–265.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_5_259_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1931.

Sul prolungamento o completamento delle funzioni di variabile reale.

Nota di LETTERIO LABOCCETTA (a Roma).

Sunto. - *Se due funzioni sono complementari, tali cioè che ognuna di esse esiste ed ha valori reali negli intervalli nei quali l'altra assume valori non esistenti o immaginari, si può costruire una funzione unica che nei successivi intervalli coincide con i valori reali o dell'una o dell'altra di esse. Vengono date come esempi l'unificazione delle funzioni circolari con quelle iperboliche e l'espressione unica dei logaritmi dei numeri reali tanto positivi quanto negativi.*

In una mia comunicazione (3) sulla generazione geometrica delle forme fondamentali sgn x, sem sgn x, Dir x, Punt x delle *costanti discontinue*, ho accennato, fra le altre, anche ad una importante applicazione analitica di esse consistente nel prolungamento a tutto il campo dei valori reali della variabile, da $-\infty$

(3) Al Congresso di Trento-Bolzano, Settembre 1930, della Società Italiana per il Progresso delle Scienze. Un sunto di detta comunicazione è stato pubblicato negli « Atti », vol. II, pag. 27.

a $+\infty$, di quelle funzioni il cui valore in certi intervalli diventa immaginario o non esistente. Poichè di tale applicazione non mi è occorso di far parola in alcuno dei precedenti miei scritti, penso che non sia per riuscire privo di interesse il darne qui un breve cenno, mostrando in qual modo si pervenga così ad accoppiare a due a due le funzioni i cui valori esistono e sono finiti e reali in intervalli complementari, ed a ridurle quindi ad una funzione unica comprendente le parti reali dell'una e dell'altra.

1. Il valore di una funzione diventa immaginario, o inesistente, in quei punti nei quali la variabile supera un certo valore, o scende al disotto di esso, ed in particolare, se questo valore è lo zero, quando la variabile cambia di segno, venendo con ciò a cadere nell'interno di un intervallo, finito o infinito, nel quale cambia di segno una certa espressione del valore della funzione che trovasi sotto un radicale di indice pari, o diventa negativa l'espressione del valore assoluto di essa.

Ad esempio, i valori delle ordinate della parabola e della coppia di semirette rappresentate dalle equazioni

(1′) $$y^2 = x$$

(1″) $$y \operatorname{sgn} y = x$$

sono rispettivamente immaginari e non esistenti nel semipiano $\operatorname{sgn} x + 1 = 0$, mentre le ordinate della parabola e della coppia di semirette

(2′) $$y^2 = -x$$

(2″) $$y \operatorname{sgn} y = -x$$

sono immaginarie, o non esistenti, nel semipiano $\operatorname{sgn} x - 1 = 0$.

Analogamente i valori delle ordinate del cerchio e del quadrato

(3′) $$x^2 + y^2 = r^2$$

(3″) $$x \operatorname{sgn} x + y \operatorname{sgn} y = r$$

sono immaginari, o non esistenti, fuori dell'intervallo $x \leq r$ mentre i valori delle ordinate dell'iperbole e delle due coppie di semirette

(4′) $$x^2 - y^2 = r^2$$

(4″) $$x \operatorname{sgn} x - y \operatorname{sgn} y = r$$

sono immaginari, o non esistenti, nello stesso intervallo.

I due sistemi (1) e (2) sono complementari fra di loro e così pure i due sistemi (3) e (4). Ciascuna coppia di funzioni complementari può essere riunita in una espressione analitica unica che ha valori reali ed esistenti da $-\infty$ a $+\infty$, e ciò impedendo il cambiamento di segno che si verifica nel passaggio della variabile per il valore zero o r. Si hanno così per la rappresentazione complessiva delle anzidette coppie di funzioni complementari le equazioni

$$y^2 = x \operatorname{sgn} x \tag{5}$$

$$y \operatorname{sgn} y = x \operatorname{sgn} x \tag{6}$$

$$y^2 = (r^2 - x^2) \operatorname{sgn} (r^2 - x^2) \tag{7}$$

$$y \operatorname{sgn} y = (r - x \operatorname{sgn} x) \operatorname{sgn} (r^2 - x^2). \tag{8}$$

2. Analogamente dalle equazioni della lemniscata e della curva ad essa complementare

$$y_1 = \frac{x}{r} \sqrt{r^2 - x^2} \tag{10'}$$

$$y_2 = \frac{x}{r} \sqrt{x^2 - r^2} \tag{10''}$$

che sono reali la prima nell'intervallo $|x| \leq r$ e la seconda nell'intervallo $|x| \geq r$, si passa alla equazione unica del complesso delle due curve

$$y = x \sqrt{(r^2 - x^2) \operatorname{sgn} (r^2 - x^2)} \tag{11}$$

che conserva rispetto al complesso (7) la stessa proprietà delle due curve (10'), (10'') rispetto a quelle (3'), (4'), cioè l'ordinata di ogni punto della (11) si ottiene moltiplicando per la sua ascissa la corrispondente ordinata di (7), e ciò in tutto l'intervallo $-\infty$, $+\infty$.

3. Come si scorge, tanto la (11) quanto la (7) sono dei casi particolari di un procedimento generale che è il seguente: date due funzioni i cui valori sono reali in intervalli complementari

$$y_1 = F\left\{x, \sqrt[2n]{f(x)}\right\} \tag{12'}$$

$$y_2 = F\left\{x, \sqrt[2n]{-f(x)}\right\} \tag{12''}$$

e che differiscono solo per il segno di una espressione sotto un radicale di indice pari, si riuniscono in una funzione unica complessiva da $-\infty$ a $+\infty$ col rendere sempre positiva l'espressione sotto il radicale, cioè ponendo

$$y = F\left\{x, \sqrt[2n]{f(x) \operatorname{sgn} f(x)}\right\}. \tag{13}$$

4. Segue dalla (13) una notevole proprietà delle funzioni del tipo di quelle (12) che sono reali in intervalli complementari. Se infatti sono, ad esempio,

$$(14') \qquad y_c = f_c(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

$$(14'') \qquad y_i = f_i(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

due di queste funzioni, rappresentanti la prima l'ordinata di un cerchio che è reale per $|x| \leq 1$ e la seconda l'ordinata di un iperbole, che è reale per $|x| \geq 1$, si deducono da esse due funzioni

$$(15') \qquad y_{ci} = \sqrt{(1 - x^2)\,\mathrm{sgn}\,(1 - x^2)} = \sqrt{\mathrm{sgn}\,(1 - x^2)}\, f_c(x),$$

$$(15'') \qquad y_{ic} = \sqrt{(x^2 - 1)\,\mathrm{sgn}\,(x^2 - 1)} = \sqrt{\mathrm{sgn}\,(x^2 - 1)}\, f_i(x)$$

reali e coincidenti fra loro per qualsiasi valore di x, ciascuna di esse rappresentando il complesso delle parti reali delle (14) nell'intervallo $-\infty, +\infty$. Ma poichè nell'intervallo $|x| \leq 1$ nel quale è reale y_c è $\mathrm{sgn}\,(x^2 - 1) = -1$ ed invece è $\mathrm{sgn}\,(1 - x^2) = -1$ nell'intervallo $|x| \geq 1$ nel quale è reale y_i ne segue che nei detti due intervalli, si ha rispettivamente:

$$(16') \qquad y_{ci} = i f_i(x),$$

$$(16'') \qquad y_{ic} = i f_c(x)$$

relazioni le quali mostrano come una grandezza reale y possa apparire sotto forma immaginaria $if(x)$, negl'intervalli nei quali in $f(x)$ è contenuto implicitamente il fattore immaginario i, cosicchè il prodotto $if(x)$ riesca reale.

5. Le (16) esprimono la nota proprietà che il rapporto fra l'ordinata di un punto del cerchio e quella di un punto della iperbole complementare avente la stessa ascissa è uguale all'unità immaginaria; dal che segue chiamando $s_c(x)$, $(s_i(x))$ il segmento circolare (iperbolico) determinato dall'arco del cerchio (dell'iperbole) il cui estremo ha per ascissa x, che

$$(17') \qquad s_c(x) = i \int_x^1 \sqrt{x^2 - 1}\, dx,$$

$$(17'') \qquad s_i(x) = i \int_x^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

ed aggiungendo al doppio dell'uno e dell'altro il doppio del triangolo avente per base l'ascissa e per altezza l'ordinata, si ha per i due doppi settori, circolare ed iperbolico corrispondenti che indicheremo con $\varphi_c(x)$, $\varphi_i(x)$

$$(18') \qquad \varphi_c(x) = i[xy_i + 2s_i(x)],$$

$$(18'') \qquad \varphi_i(x) = i[xy_c + 2s_c(x)],$$

ovvero

$$(19') \qquad \varphi_c(x) = i\varphi_i(x),$$

$$(19'') \qquad \varphi_i(x) = i\varphi_c(x).$$

Cioè esiste fra i settori circolare ed iperbolico lo stesso rapporto che fra le ordinate del punto estremo dell'arco che li definisce [1].

Già da ciò apparisce l'opportunità di mettere in evidenza nella notazione il valore dell'ascissa x dell'estremo dell'arco, opportunità che risulterà ancora meglio da quanto sarà esposto nei paragrafi seguenti.

6. Se invece delle equazioni particolari del cerchio e della iperbole si fa uso di una delle due equazioni complessive (15) chiamando seno e coseno *circolare-iperbolico* (*iperbolico-circolare*) l'ordinata e l'ascissa di un punto determinante un settore $\varphi_{ci}(x)$, ($\varphi_{ic}(x)$) si hanno evidentemente tra il seno e il coseno, e le altre funzioni circolari-iperboliche, le relazioni seguenti

$$(20) \qquad \cos^2 \varphi_{ci}(x) + \operatorname{sen}^2 \varphi_{ci}(x) \operatorname{sgn}(x^2 - 1) = 1,$$

$$(21) \qquad \sec^2 \varphi_{ci}(x) + \tan^2 \varphi_{ci} \operatorname{sgn}(x^2 - 1) = 1,$$

$$(22) \qquad \cos 2\varphi_{ci}(x) = 1 + 2 \operatorname{sen}^2 \varphi_{ci}(x) \operatorname{sgn}(x^2 - 1),$$

$$(23) \qquad d \cos \varphi_{ic}(x) = \operatorname{sen} \varphi_{ic}(x) \operatorname{sgn}(x^2 - 1) d\varphi_{ic}(x),$$

$$(24) \qquad d \tan \varphi_{ic}(x) = (\cos^2 \varphi_{ic}(x))^{-1} d\varphi_{ic}(x) = 1 - \tan^2 \varphi_{ie} \operatorname{sgn}(x^2 - 1) d\varphi_{ic}(x),$$

$$(25) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 1)\operatorname{sgn}(x^2 - 1)}} = \operatorname{arc}\cos \varphi_{ic}(x) \operatorname{sgn}(x^2 - 1) + C,$$

e le altre analoghe che si ottengono accoppiando a due a due una relazione fra funzioni circolari e la corrispondente relazione fra funzioni iperboliche.

Le relazioni complessive così formate coincidono con le relazioni fra le funzioni circolari, o con quelle fra le funzioni iperboliche, secondo che il valore assoluto dell'ascissa x dell'estremo dell'arco determinante il settore è minore o maggiore di 1.

[1] Vedi in S. Günther, *Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen*, al § 5 del Cap. I, pagg. 16-24, la storia di questa relazione.

7. Può accadere infine di dover prolungare una funzione in modo che sia essa a percorrere per intiero l'insieme dei valori reali da $-\infty$ a $+\infty$. Ad esempio le due funzioni

$$y = e^x, \tag{26'}$$

$$-y = e^{-x}, \tag{26''}$$

sono tali che mentre la variabile percorre tutto l'insieme dei valori reali da $-\infty$ a $+\infty$ la prima di esse varia da 0 a $+\infty$, percorre l'insieme dei valori positivi $\operatorname{sgn} y - 1 = 0$, e la seconda invece varia da $-\infty$ a 0, percorre l'insieme dei valori negativi $\operatorname{sgn} y + 1 = 0$; esse perciò possono essere considerate come complementari.

Qui la grandezza che cambia segno, determinando l'immaginarietà della funzione, è il valore della funzione stessa [1]. Ma il procedimento per impedire tale cambiamento ed unificare le due funzioni (26) è sempre lo stesso di quello innanzi indicato. Si ha infatti in

$$y = \operatorname{sgn} y e^{x \operatorname{sgn} y} \tag{27}$$

una funzione y che può assumere tutti i valori reali da $-\infty$ a $+\infty$ ed è tale che coincide la (26') nel semipiano delle y positive dove le x sono i logaritmi dei numeri positivi, nel mentre coincide con la (26'') nel semipiano delle y negative dove $x \operatorname{sgn} y$ sono i *logaritmi dei numeri negativi*, se si conviene di chiamare logaritmo di un numero reale y il valore reale del prodotto $x \operatorname{sgn} y$ che viene fornito dalla (27). Questa convenzione è giustificata dal fatto che la funzione y definita dalla (27) gode delle proprietà espresse dalla relazione

$$f(x_1, \operatorname{sgn} y_1) f(x_2, \operatorname{sgn} y_2) = f(x_1 \operatorname{sgn} y_1 + x_2 \operatorname{sgn} y_2, \operatorname{sgn} y_1 y_2) \tag{28}$$

equazione funzionale che coincide con quella della funzione esponenziale

$$f(x_1) f(x_2) = f(x_1 + x_2) \tag{29}$$

quando si prescinda dal segno che la funzione può assumere.

Dalla (27) risulta che ad ogni numero reale dato corrisponde un solo logaritmo, mentre ad un logaritmo, dato in valore e segno, corrispondono due numeri tali che l'uno è il reciproco dell'altro e di segno contrario.

[1] Un caso analogo è quello considerato nel precedente mio scritto sulla funzione f limitata ad a e b. $[f]_a^b$ in questo « Bollettino », anno IX, n.° 4, Ottobre 1930.

Infatti facendo $(x_1 = x_2) = x$ e $\operatorname{sgn} y_1 = -\operatorname{sgn} y_2$ l'equazione funzionale (28) mostra che deve aversi

$$f(x_1, +1) f(x_1, -1) = f(0, -1), \tag{30}$$

cioè il logaritmo del prodotto dei due numeri è zero ed essi sono di segno contrario e quindi se il valore assoluto di uno è y quello dell'altro è $\frac{1}{y}$. Geometricamente la (27) significa che il logaritmo invece di esser definito come valore dell'area di un segmento della iperbole ordinaria, è definito come valore dell'area di un segmento dell'iperbole

$$yx \operatorname{sgn} x = 1, \tag{31}$$

simmetrificata rispetto all'asse delle x, e che i limiti dell'integrale invece di essere 1 ed x sono $\operatorname{sgn} x$ ed x, si ha cioè come definizione del logaritmo

$$\log x = \int_{\operatorname{sgn} x}^{x} \frac{dx}{x}, \tag{32}$$

definizione che è valevole in tutti i casi tanto per valori positivi quanto per valori negativi di x (1).

(1) L'unificazione dei logaritmi dei numeri reali positivi e negativi è stato indicata al Congresso di Milano, dello scorso Settembre, della Società Italiana per il Progresso delle Scienze in una comunicazione nella quale ho mostrato anche la continuità geometrica dei due rami delle (27) mediante una proiezione su di un cilindro, la quale rende anche evidente una periodicità, reale, della funzione.