Bollettino Unione Matematica Italiana

Beniamino Segre

Questioni geometriche legate colla teoria delle funzioni di due variabili complesse

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.5, p. 269–274.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_5_269_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1931.

Questioni geometriche legate colla teoria delle funzioni di due variabili complesse (5).

Nota di BENIAMINO SEGRE (a Roma).

Sunto. - *L'A. tratta di questioni geometriche che si riattaccano alla rappresentazione dei valori di due variabili complesse coi punti di S_4 ed alla teoria delle funzioni analitiche di due variabili, facendone applicazione allo studio delle singolarità di queste funzioni.*

Quando si passa dallo studio delle funzioni analitiche di una variabile complessa, allo studio delle funzioni analitiche di più variabili complesse — e, per ovvie ragioni di semplicità, convien

(5) Comunicazione tenuta al Congresso di Milano della Società Italiana per il Progresso delle Scienze (Settembre 1931).

in un primo tempo limitarsi a due sole variabili — si incontrano difficoltà nuove molteplici, alcune delle quali son state superate solo recentemente.

Già nella rappresentazione usuale delle coppie di variabili complesse

$$x = x_1 + ix_2, \quad y = x_3 + ix_4 \tag{1}$$

— ossia dei punti complessi di un piano π — coi punti reali (x_1, x_2, x_3, x_4) di uno spazio euclideo S_4, si presenta una questione preliminare relativa al modo più opportuno di considerare i valori infiniti. La questione analoga che si incontra nel caso di una sola variabile complessa $x = x_1 + ix_2$ per l'ordinaria rappresentazione di ARGAND e GAUSS, si risolve, in modo ben noto, associando al valore $x = \infty$ gli infiniti punti appartenenti alla retta impropria del piano proiettivo (x_1, x_2), il che equivale a riferire opportunamente quest'ultimo alla sfera complessa. Le cose procedono un po' meno semplicemente se si tratta di due o più variabili, e furono in tal caso sviscerate da CORRADO SEGRE, in lavori che risalgono a circa 40 anni fa.

L'importanza di tali lavori è stata da poco posta in chiara luce per merito di F. SEVERI, il quale — poggiando su essi — è pervenuto a risultati fondamentali di Analisi. Io pure, seguendo le orme del Maestro, mi son occupato di problemi che si ispirano a tale ordine di idee. [1] Qui mi limiterò ad esporre una parte dei risultati da me conseguiti; e, allo scopo di mostrare l'utilità che possono offrire certe considerazioni geometriche in un campo di pura Analisi, dedurrò — seguendo una via uniforme e, per così dire, intuitiva — varie proprietà relative ai punti singolari delle funzioni analitiche di due variabili complesse. Si tratta di proprietà in parte note: queste però furon trovate con metodi disparati, e sovente non privi di difficoltà.

[1] Ved.: *Sobre algunas representaciones reales del plano complejo*, « Revista Math. Hispano-Americana », 1928; *Intorno al problema di Poincaré della rappresentazione pseudoconforme*, « Rendic. R. Acc. Naz. dei Lincei », serie VI, t. 13 (1931): ed inoltre una Memoria collo stesso titolo della presente Comunicazione, pubblicata nei « Rendic. del Seminario Mat. della R. Università di Roma », parte II^a, t. 7 (1931). Rinvio a tali lavori per la parte bibliografica, e per le dimostrazioni: per quanto concerne i suddetti risultati di SEVERI, e per ulteriori notizie bibliografiche, cfr. F. SEVERI, *Risultati, vedute e problemi nella teoria delle funzioni analitiche di due variabili complesse*, « Rendic. del Seminario Mat. della R. Università di Roma », parte II^a, t. 7 (1931).

***

Incominciamo col premettere alcune proposizioni geometriche.

Alla questione accennata in principio, si risponde intanto nel modo seguente. Nello spazio Σ all'infinito dell' S_4 rappresentativo, vi è una ben determinata congruenza K di rette (reali), i punti di ciascuna delle quali corrispondono ad uno stesso punto (complesso) all'infinito di π. Precisamente K è una *congruenza lineare ellittica*, costituita dalle rette che si appoggiano a due rette fisse r' ed r'' dello spazio Σ, sghembe fra loro e complesse coniugate.

Un' *equazione lineare* fra le due variabili complesse (1), si scinde nel campo reale in due legami lineari nelle (x_1, x_2, x_3, x_4), e si rappresenta dunque in S_4 mediante un *piano* (reale). Questo sega lo spazio Σ all'infinito lungo una retta della congruenza K suddetta; e viceversa, ogni piano (reale e proprio) passante per una retta di K — e cioè appoggiato alle rette r', r'' — può ottenersi in tal guisa, e corrisponde dunque ad una retta di π (della quale porge una rappresentazione di ARGAND e GAUSS).

Gli ∞^4 piani che così si ottengono in S_4 denominansi ***piani caratteristici***, dicendosi più generalmente — secondo una locuzione introdotta da T. LEVI-CIVITA — ***superficie caratteristica***, una superficie (reale) di S_4 rappresentabile mediante un legame analitico fra le due variabili complesse x ed y. Si ha che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie di S_4 *— avente in ogni punto piano tangente — sia una superficie caratteristica, è che i suoi piani tangenti seghino lo spazio* Σ *secondo rette di* K, *e cioè siano piani caratteristici.*

Ogni superficie caratteristica è *bilatera*, ed inoltre

Si possono orientare tutte le superficie caratteristiche di S_4, *in guisa che ogni deformazione continua che muti una superficie caratteristica in una superficie caratteristica — per modo che la superficie negli stadi intermedi si mantenga caratteristica — conservi gli orientamenti fissati.*

Un' ipersuperficie analitica (reale) Φ, di equazione

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \tag{2}$$

ammette in un suo punto semplice A un ben determinato piano caratteristico tangente, al quale appartengono due tangenti tripunte di Φ relative ad A. Se queste ultime risultano fra loro ortogonali, o — come caso particolare — indeterminate, A dicesi un ***punto planare*** di Φ. Affinchè un punto semplice della (2) sia planare, occorre e basta che le sue coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4) annullino l' espressione differenziale di E. E. LEVI:

$$L(\varphi) \equiv \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3{}^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_4{}^2}\right) + \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_4}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2{}^2}\right) -$$
$$- 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_4}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2 \partial x_4}\right) -$$
$$- 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_4} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_4} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2 \partial x_3}\right).$$

Le varietà a punti planari — dette anche ***iperplanoidi***, perchè fra esse vi son manifestamente gli iperpiani di S_4 — non son altro che *i luoghi analitici di* ∞^1 *superficie caratteristiche.* È assai notevole che:

Un iperplanoide viene sempre attraversato da una superficie caratteristica tangente (che non gli appartenga), nell' intorno del punto di contatto.

Questa proprietà conduce a nuove interessanti caratterizzazioni delle superficie caratteristiche e degli iperplanoidi, dimostrandosi che:

a) *Data in* S_4 *una superficie* F *avente in ogni punto piano tangente, si può sempre (ed in un infiniti modi) determinare un iperplanoide che la tocchi in suo punto* P *generico, e che abbia con essa — nell' intorno di* P *— questo sol punto in comune, purchè la* F *non sia una* ***superficie caratteristica.***

b) *Esistono infinite superficie caratteristiche ed infiniti iperplanoidi che toccano una data varietà* Φ *a tre dimensioni in un suo punto semplice* A ***non planare,*** *avendo con essa — nell' intorno di* A *— questo sol punto in comune. Le une e gli altri — nelle vicinanze di* A *— trovansi da una banda ben determinata di* Φ, *che dicesi* ***la regione negativa,*** *la rimanente denominandosi* ***la regione positiva.***

Resta così intrinsecamente fissata un' *orientazione* di Φ, nell' intorno di ogni suo punto A non planare: e precisamente, se Φ si rappresenta colla (2), la regione negativa è definita analiticamente dal fatto che nei suoi punti la $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ assume segno uguale a quello che $L(\varphi)$ ha nel punto A (1).

(1) I concetti ed i teorema dianzi esposti, hanno significato invariante di fronte alle ***trasformazioni pseudoconformi*** di S_4 — ossia di fronte a quelle trasformazioni puntuali di S_4 che corrispondono alle trasformazioni analitiche sulle due variabili complesse (x, y) — e, insieme ad altri che qui per ragioni di spazio vengon omessi, risultano di valido ausilio nello studio di tali trasformazioni.

***

Il ponte di passaggio fra le precedenti considerazioni geometriche e le proposizioni analitiche che abbiamo di mira, è posto dal seguente lemma, già di per sè non privo di interesse e di facile dimostrazione.

L'insieme $\mathfrak{J}$ di S_4 costituito dai punti di singolarità (non artificiale) di una qualunque funzione analitica uniforme delle due variabili complesse x ed y (¹), *è tale che ogni iperplanoide che lo incontri lo sega secondo un insieme denso (e cioè privo di punti isolati).*

Da qui discende già senz' altro, come corollario immediato, il fatto noto che l' insieme $\mathfrak{J}$ suddetto non può comprendere *punti isolati* e neppure *linee isolate*, dicendo in generale che un sottoinsieme I di $\mathfrak{J}$ è ***isolato*** quando I ed $\mathfrak{J}-I$ sono ***limitati*** (***chiusi*** secondo Cantor). Dunque l' insieme $\mathfrak{J}$ è ***perfetto*** e tale è pure ogni suo sottoinsieme isolato. Segue inoltre che:

*L'insieme $\mathfrak{J}$ dei punti singolari di una funzione analitica di due variabili complesse, non comprende alcun sottoinsieme **isolato** che sia **tutto al finito**.*

Un sottoinsieme ***isolato*** di $\mathfrak{J}$ è intanto tale che nell' intorno di ogni suo punto non cadono punti di $\mathfrak{J}$ che non appartengano al sottoinsieme stesso. L' ipotesi che esista un siffatto sottoinsieme I ***tutto al finito*** conduce a contraddire il lemma, poichè:

Dato in uno spazio S euclideo un qualsiasi insieme I di punti tutto al finito e limitato, si può sempre trovare in S qualche iperpiano avente con I uno ed un sol punto in comune.

Fissato infatti arbitrariamente in S un punto proprio O, dalle ipotesi fatte risulta che la distanza di O dai punti di I *ammette un massimo* r *finito*. Nessun punto di I è dunque esterno all' ipersfera di centro O e raggio r, mentre su essa vi è di certo qualche punto P di I: l' iperpiano che tocca quell' ipersfera in un tal punto P, soddisfa manifestamente alle condizioni volute.

Nelle nostre ipotesi esso sega $\mathfrak{J}$ secondo un insieme che ammette P come punto isolato; ciò effettivamente contraddice il lemma, il che prova la verità dell' asserto. La proposizione così dimostrata comprende in particolare il teorema Hartogs-Levi, secondo cui:

Una funzione analitica di due variabili complesse, non può ammettere un campo lacunare tutto al finito.

(¹) Qui — per brevità — denominasi ***singolare*** ogni punto in cui la funzione non è olomorfa (comprendendo così come singolari anche i punti esterni al campo di esistenza della funzione).

Dal teorema *a*), in base al già più volte usato lemma, risulta subito il teorema di HARTOGS affermante che:

Se una funzione analitica di due variabili complesse — definita in un campo a quattro dimensioni di S_4 — *ha i suoi punti singolari su di una varietà a due dimensioni avente in ogni punto piano tangente, questa varietà non può che essere una* ***superficie caratteristica.***

Dal teorema *b*) segue del pari in virtù del lemma che:

Se una varietà Φ *a tre dimensioni di* S_4 *è luogo di punti singolari per una funzione analitica delle due variabili complesse, quest'ultima — nell' intorno di un punto non planare di* Φ — *non può risultare olomorfa nella regione negativa determinata da* Φ.

Siccome le V_3 a punti planari non son altro che gli iperplanoidi, così dall' ultimo teorema si deduce che:

Se una funzione analitica di due variabili complesse è olomorfa in un campo a quattro dimensioni, tranne i punti di una V_3 *interna al campo, in cui essa è singolare, tale* V_3 *è necessariamente un iperplanoide.*

Da quanto precede si ha da ultimo agevolmente che:

La frontiera Φ *(a tre dimensioni) del campo di esistenza di una funzione analitica di due variabili complesse, determina nell' intorno di ogni suo punto non planare una regione positiva, la quale deve appartenere al campo stesso.*

Ciò si traduce in condizioni necessarie per la frontiera del campo di esistenza di una funzione analitica di due variabili complesse, che si scrivono senza alcuna difficoltà; esse furon trovate per altra via da E. E. LEVI, che ne ha anche dimostrato la sufficienza in « piccolo ».