Bollettino Unione Matematica Italiana

Cesare Rimini

Un'applicazione dèlia teoria dei residui ad un teorema di elettromagnetismo

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.5, p. 274–277.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_5_274_0>

Un'applicazione della teoria dei residui ad un teorema di elettromagnetismo.

Nota di Cesare Rimini (a Bologna).

Sunto. - *In questa Nota, applicando la teoria dei residui, si dimostra in modo estremamente semplice una proposizione di elettromagnetismo, che generalmente viene stabilita attraverso calcoli artificiosi.*

Un conduttore cilindrico indefinito, avente per sezione normale un anello circolare di raggi r_1 ed r_2 $(0 \leq r_1 < r_2)$ sia percorso da corrente distribuita con densità superficiale q funzione finita e continua della sola distanza r dal centro della sezione. Per tal modo questa, di forma anulare, è divisibile in anelli elementari, di raggio r e di spessore dr, ciascuno dei quali convoglia una corrente di intensità:

(1) $$dI = 2\pi q r dr$$

uniformemente distribuita lungo la periferia, in guisa che per ogni arco di $d\theta$ radianti ne passa la frazione $\frac{d\theta}{2\pi}$. Ciò equivale a dire che il corrispondente elemento superficiale $r dr d\theta$ è attraversato da una corrente di intensità

(2) $$q r dr d\theta .$$

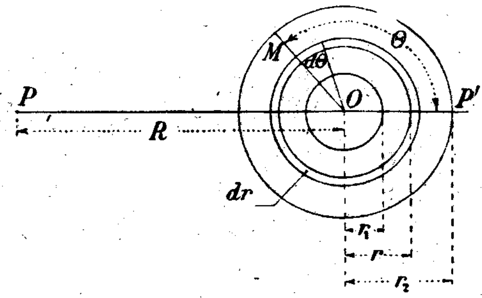
La intensità della corrente compresa fra il cerchio interno, di raggio r_1, ed il cerchio generico di raggio r, è ovviamente una funzione di r misurata dall'integrale:

$$I(r) = 2\pi \int_{r_1}^{r} q r dr$$

cosicchè la intensità totale vale $I(r_2)$.

Ci proponiamo di calcolare il campo magnetico generato da una tale corrente in un punto generico P posto alla distanza R dall'asse del conduttore.

All'uopo, condotto per P il piano normale all'asse, di traccia O, si consideri il campo elementare dovuto alla corrente (2) che attra-



versa l'elemento di superficie trasversale M tratteggiato in figura, definito dalle sue coordinate polari r, θ (O polo, OP' asse polare), dallo spessore dr e dalla ampiezza angolare $d\theta$.

Il campo generato da tale elemento, come è noto, è dato dal prodotto della espressione (1) per il vettore

(3) $$\frac{2}{\operatorname{mod} \boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{k} \wedge \frac{\boldsymbol{u}}{\operatorname{mod} \boldsymbol{u}} = 2 \frac{\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}}$$

essendo u il vettore rappresentato dal segmento $\overrightarrow{PM}$, k vettore unitario diretto come la corrente.

La espressione (3) rappresenta, al pari di u, un vettore normale a k, e pertanto essa è, al modo noto, rappresentabile mediante un numero complesso. Per determinare questo, basta osservare che, assumendo P per origine e PO per asse reale, si ha subito:

a) che al vettore u corrisponde il numero complesso $\zeta = R + re^{i\theta}$,

b) che $u \times u$, quadrato di mod u, è misurato dal prodotto di ζ per il suo coniugato $\zeta_0 = R + re^{-i\theta}$,

c) che l'operatore $k \wedge$, rotazione positiva di un angolo retto, corrisponde alla moltiplicazione per l'unità immaginaria i.

Ne segue che il vettore (3) è rappresentato dal numero complesso $\frac{i}{\zeta_0}$ e conseguentemente il cercato campo elementare da:

$$2qrdrd\theta \frac{i}{\zeta_0} = 2qrdr \frac{id\theta}{R + re^{-i\theta}}.$$

Pertanto al campo dH dovuto alla corrente (1) che attraversa l'intero anello $(r, r + dr)$ corrisponde il numero complesso

$$dH = 2qrdr \int_0^{2\pi} \frac{id\theta}{R + re^{-i\theta}} = \frac{dI}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{id\theta}{R + re^{-i\theta}}.$$

che, è bene notarlo, lo rappresenta *vettorialmente* in modo completo.

Posto $re^{i\theta} = z$, questa espressione si trasforma in

$$dH = 2qrdr \oint \frac{dz}{r + \frac{R}{r} z} = \frac{dI}{\pi r} \oint \frac{dz}{r + \frac{R}{r} z}.$$

essendo l'integrale curvilineo esteso alla circonferenza di centro O e raggio r, traccia dell'anello elementare di corrente.

Ora si osserva che $\frac{1}{r + \frac{R}{r} z}$ è funzione analitica regolare dovunque salvo nel punto $z_1 = -\frac{r^2}{R}$ dove presenta una singolarità polare col residuo $\frac{r}{R}$. Quindi l'integrale curvilineo scritto vale zero o $\frac{2\pi ir}{R}$ secondo che z_1 è esterno o interno a quel cerchio, cioè secondo che R è minore o maggiore di r.

Si ha dunque, nel primo caso:

$$d\boldsymbol{H} = 0,$$

cioè:

Il campo magnetico è nullo nei punti interni all'anello conduttore; mentre, nel secondo caso, si ha:

$$d\boldsymbol{H} = i\,\frac{2dI}{R},$$

la quale espressione rappresenta un vettore di grandezza $\frac{2dI}{R}$ diretto normalmente a PO, coincidente cioè col campo che in P si avrebbe se la corrente dI fosse concentrata nell'asse del conduttore.

Ne segue che, in generale:

Il campo magnetico in un punto qualunque coincide con quello che nello stesso punto sarebbe generato da una corrente concentrata nell'asse, di intensità uguale a quella che è convogliata da quegli strati del conduttore rispetto ai quali il punto è esterno.