BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

TULLIO VIOLA

Riflessioni intorno ad alcune applicazioni del postulato della scelta di E. Zermelo e del principio di approssimazione di B. Levi nella teoria degli aggregati

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.5, p. 287–294.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_5_287_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1931.

Riflessioni intorno ad alcune applicazioni del postulato della scelta di E. Zermelo e del principio di approssimazione di B. Levi nella teoria degli aggregati.

Nota di T. VIOLA (a Bologna).

Sunto. - *Si esaminano alcuni esempi della teoria degli aggregati di punti della scala lineare alla luce del* principio di approssimazione *di* B. LEVI.

Il prof. B. LEVI, in un articolo pubblicato in « Scritti matematici offerti ad Enrico D'Ovidio » (Torino, Bocca, 1918) sotto il titolo *Riflessioni sopra alcuni principî della teoria degli aggregati e delle funzioni* [1] e in uno successivo pubblicato nei « Mathematische Annalen » (Band 90, Heft 3-4, 1923), sotto il titolo *Sui procedimenti transfiniti* [2], ha enunciato un « *Principio d'approssimazione* » con lo scopo di regolarizzare parecchie dimostrazioni dell'analisi ordinaria nelle quali si fa uso, più o meno palese, del postulato della scelta di E. ZERMELO.

Il LEVI comincia con l'osservare (1) che « *in ogni teoria mate-* « *matica si suppongono taluni aggregati, per ciascuno dei quali si*

(1) [2] pag. 165, [1] pag. 305.

« *postula la possibilità di scegliere (fissare) arbitrariamente un ele-* « *mento, con atto di pensiero non scomponibile o riducibile ad altri* « *più semplici* ». Tali aggregati egli chiama « *gli aggregati primi della teoria in questione* »; e dice che « essi definiscono il *dominio deduttivo* in cui si svolge quella teoria ».

Ogni dominio deduttivo Ω è suscettibile di « *ampliamento* ». « Assegnato per es. un aggregato A, noi possiamo considerare « l'aggregato che ha per elementi aggregati costituiti da un'infi- « nità di elementi di A (eventualmente soggetti a determinate re- « strizioni). Se B è il nuovo aggregato, avverrà generalmente che « gli aggregati–elementi di B non siano fra loro distinguibili, in « quanto noi conosciamo tali aggregati–elementi solo per la loro « *comune* definizione, senza che ci sia possibile di definirne uno « mediante scelte arbitrarie (necessariamente in numero finito) « nell'aggregato primo A. B può allora considerarsi come aggre- « gato primo per un dominio deduttivo *più ampio* di quello ini- « zialmente considerato: si può allora ammettere di fissare (sce- « gliere, nominare) uno degli elementi di B, con atto unico di « pensiero. Così le infinite scelte, inammissibili in un dato do- « minio deduttivo, si risolvono in un'unica scelta, in un dominio « deduttivo più ampio (²) ».

Più generalmente, sia E un aggregato i cui elementi possano farsi corrispondere ciascuno ad un sistema infinito di elementi definibili in Ω. Se una funzione $f(x)$ ha per dominio della x un subaggregato D di E, *essa esiste in un ampliamento del dominio deduttivo* Ω (³). Orbene, quale criterio possiamo seguire per giudicare della maggiore o minore convenienza dell'*ampliamento*? Quali ragioni valgono a rendersi accettabile l'esistenza della funzione $f(x)$, o di singoli valori di essa? Il LEVI risponde enunciando il suo « *Principio d'approssimazione* » e dice che i valori di $f(x)$ che vi soddisfano appartengono ad un « *ampliamento naturale di* Ω »:

« *Sia definita una funzione numerica* $\mathrm{d(y, z)}$ *delle coppie di ele-* « *menti* $\mathrm{(y, z)}$ *del dominio* F *della* $\mathrm{f(x)}$, *e sia* $\mathrm{d(y, z)} = 0$ *sempre e* « *solo quando* $\mathrm{y = z}$. *Supponiamo che* a *sia un elemento di* D *tale* « *che, prefissato un numero razionale arbitrario* δ, *fra gli elementi* « *dell'aggregato infinito di elementi definibili in* Ω *che si suppone* « *corrispondere ad* a, *se ne possa fissare un numero finito* n *tali* « *che, indicando con* a' *e* a'' *due elementi di* D *qualunque aventi* « *come corrispondenti in* Ω *aggregati aventi comuni con quello cor-* « *rispondente ad* a *i detti* n *elementi, sia sempre* $\mathrm{d(f(a'), f(a''))} \leq \delta$.

(²) [2] pag. 166, [1] pag. 308.
(³) [2] pag. 170.

« *Allora noi consideriamo* f(a) *come appartenente all'ampliamento* « *naturale di* Ω *definito dalla funzione* d(y, z) [4] ».

Il LEVI dimostra [5] che ogni qualvolta il principio di approssimazione permette di affermare l'esistenza dell'elemento $f(a)$, questo dipende soltanto da un'infinità numerabile di scelte arbitrarie di elementi nel dominio deduttivo Ω. Il principio d'approssimazione può dunque considerarsi, anche per questa ragione, come un postulato che domanda meno di quello dello ZERMELO; donde la sua importanza sia per quelli che accettano il postulato di ZERMELO (perchè costituisce uno spezzamento di quest'ultimo), sia per quelli che la respingono (perchè enuncia una minor concessione secondo noi accettabile).

Nelle considerazioni che seguono rimando, per un'esposizione sistematica dei varî esempî d'applicazione del postulato di ZERMELO a W. SIERPINSKI, *L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la Théorie des Ensembles et l'Analyse* (« Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie », Aprile-Maggio 1918) [3] e *Leçons sur les nombres transfinis* (Paris, Gauthier-Villars, 1928) [4] (specialmente il cap. VI), e per alcune dimostrazioni a C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen* (Leipzig u. Berlin, Teubner, 1918) [5].

1. La considerazione dei singoli esempî d'applicazione del postulato di ZERMELO nella teoria degli aggregati ci suggerisce di classificare tali esempî in due categorie: l'una comprende quelli nei quali si tratta di aggregati in generale, come per es. nella teoria dei numeri transfiniti ([4]), l'altra quelli nei quali si tratta particolarmente di aggregati di numeri reali (punti di spazi a una o più dimensioni). I primi non possono venir regolarizzati col principio di approssimazione perchè non possono dar luogo a considerazione di *distanze* o, in generale, di funzioni numeriche $d(y, z)$ atte a definire ampliamenti naturali. I secondi, *a priori*, lo possono, ma anche per questi occorre esaminare attentamente, caso per caso, la convenienza o meno di adottare particolari funzioni numeriche regolarizzatrici $d(y, z)$, aventi significato geometrico semplice, espressivo e soprattutto conforme al concetto di « *approssimazione* » nel parlare comune. Non sempre riesce trovare una tale funzione $d(y, z)$ e ciò mostra più da vicino che il principio d'approssimazione ha carattere selettivo e una portata più limitata del postulato di ZERMELO, come sopra si è detto.

(4) [2] pag. 170, [1] pag. 312.
(5) [1] pag. 323.

2. Vogliamo mostrare la verità di queste osservazioni con due primi esempi tratti dalla teoria degli aggregati di punti e precisamente da un gruppo di dimostrazioni nelle quali si fa uso del postulato della scelta, riguardanti il concetto di « *punto limite* » (6). Com'è noto, si dice che P è « *punto limite* » di un aggregato A di punti se in ogni intorno di P esiste almeno un punto dell'aggregato A diverso da P. A questo riguardo una proposizione frequentemente affermata in cui si fa uso del postulato di ZERMELO dice che *esiste in* A *una successione di punti*

(1) $$Q_1, \quad Q_2, \ldots \quad Q_n \ldots$$

che tende a P.

Il principio d'approssimazione giustifica con tutta facilità questa proposizione affermando precisamente che una successione (1) (anzi infinite di tali successioni) esiste in un ampliamento naturale del dominio deduttivo Ω dei numeri reali.

Limitiamoci al caso che l'aggregato A sia costituito da punti di una retta (cioè da numeri reali), essendo chiaro che l'estensione al caso di punti di uno spazio a più dimensioni non presenta difficoltà.

Consideriamo delle successioni (1) quelle soltanto soddisfacenti alla condizione che, per ogni coppia d'indici r, s tale che $r < s$, è $|P - Q_r| \geq |P - Q_s|$: le indicheremo come successioni (S). Essendo

$$S' = Q_1', \quad Q_2', \ldots, \quad Q_r', \ldots$$
$$S'' = Q_1'', \quad Q_2'', \ldots \quad Q_r'', \ldots$$

due qualunque di tali successioni, indichiamo con $d(S', S'')$ il limite superiore delle mutue distanze fra i punti dell'una e quelli dell'altra aventi lo stesso indice:

$$d(S', S'') = \limsup_{r=1,2,\ldots} |Q_r' - Q_r''|.$$

Evidentemente è $d(S', S'') = 0$ sempre e solo quando è $S' = S''$.

Fissiamo una qualunque S delle successioni (S). Assegnato un numero razionale arbitrario δ, esiste certamente un indice n tale che, per ogni $r \geq n$, è $|P - Q_r| \leq \frac{\delta}{2}$. Se S' ed S'' sono altre due successioni (1), aventi in comune con la S i punti

$$Q_1, \quad Q_2, \ldots, \quad Q_n,$$

sarà

$$d(S', S'') = \limsup_{r=1,2,\ldots} |Q_r' - Q_r''| = \limsup_{r=n+1,\,n+2,\ldots} |Q_r' - Q_r''| \leq \delta.$$

(6) [3] pag. 119 e seg.

Si conclude che *le successioni* (S) *appartengono tutte all'ampliamento naturale di* Ω *definito dalla funzione* $d(S', S'')$.

3. Ricordando il teorema di BOLZANO–WEIERSTRASS secondo il quale ogni aggregato limitato d'infiniti punti (cioè ogni aggregato limitato di punti che non si può porre in corrispondenza biunivoca con nessun gruppo di primi n numeri interi $1, 2, 3, \ldots, n$) ammette sempre un punto limite, risulta dal n.° precedente che *ogni aggregato limitato d'infiniti punti contiene, in un ampliamento naturale del dominio deduttivo* Ω *dei numeri reali, una successione.*

Per gli aggregati limitati di punti è dunque valida, in un ampliamento naturale del dominio deduttivo Ω dei numeri reali, la definizione di « *aggregato infinito* » dovuta al DEDEKIND (7), con tutte le conseguenze che se ne deducono (per es. il teorema: *ogni aggregato limitato* A *d'infiniti punti contiene un subaggregato (parte effettiva di* A) *avente la stessa potenza di* A (8)).

4. Come secondo esempio (n. 2 in principio) mostriamo che il principio d'approssimazione permette pure d'affermare che *in ogni aggregato limitato* A *di punti esiste una successione, contenente tutti i punti isolati di* A *ed avente inoltre come aggregato limite l'aggregato limite di* A. Al n. 5 stabiliremo poi un confronto fra questi due esempî e mostreremo che la regolarizzazione del primo è molto più accettabile di quella del secondo.

Sia $\overline{ab}$ un segmento contenente A. Dividiamo $\overline{ab}$ in $2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots$ parti uguali e, per ogni n, scegliamo ad arbitrio un punto di A in ciascuno dei 2^n segmenti in cui è stato suddiviso ab e in cui è contenuto almeno un punto di A (passando questi segmenti in rassegna nel loro ordine naturale da sinistra verso destra). Se

$$S' \equiv (a_1', \; a_2', \; a_3', \ldots, \; a_k', \ldots)$$
$$S'' \equiv (a_1'', \; a_2'', \; a_3'', \ldots, \; a_k'', \ldots)$$

sono due di tali successioni, si vede subito ch'esse soddisfano alle condizioni richieste. Poniamo

$$d(S', S'') = \limsup_{k=1,2,3,\ldots} |a_k' - a_k''|.$$

Evidentemente è $d(S', S'') = 0$ sempre e solo quando è $S' = S''$. Se S è una qualunque di tali successioni, assegnato ad arbitrio un numero razionale positivo δ, determiniamo n tale che $\frac{1}{2^n} < \delta$.

(7) [3] pag. 104 e seg., [4] pag. 52 e seg.
(8) [4] pag. 50.

Se allora a_h è il primo punto di S scelto in uno degl'intervalli di ampiezza $\frac{1}{2^n}$ e se S' ed S'' sono altre due successioni aventi in comune con S i primi h elementi, è

$$d(S', S'') = \limsup_{k=1, 2, 3,\dots} |a_k' - a_k''| = \limsup_{k=h+1, h+2,\dots} |a_k' - a_k''| < \delta.$$

5. Mettiamo in rilievo la differenza sostanziale fra l'esempio del n. 2 e quello del n. 4, mostrando come nel primo l'applicazione del principio d'approssimazione sia più accettabile che nel secondo. Vediamo infatti che nel primo la regolarizzazione delle scelte arbitrarie è fatta in modo che, dopo un numero sufficientemente grande ma finito di scelte, l'*ente* (la successione (S)) di cui si afferma l'esistenza *è determinato*, per così dire, *in quasi tutto un intervallo entro il quale esso ente possa rinchiudersi*. Intendiamo con ciò che, se $\overline{ab}$ è un intervallo entro il quale la successione (S) di cui si afferma l'esistenza può essere rinchiusa, dopo un numero sufficientemente grande ma finito di scelte arbitrarie la (S) è determinata all'infuori di quei suoi termini che sono contenuti entro un intervallo parziale di $\overline{ab}$ di lunghezza piccola ad arbitrio.

Non si può dire cosa analoga per la dimostrazione del n. 4.

Ciò mostra anche che non è lecito far subire preventivamente agli aggregati delle trasformazioni che ne alterino le dimensioni o relazioni di distanza fra punto e punto. Se si ammettessero tali trasformazioni, il postulato di ZERMELO (nella sua forma tipica, data dall'Autore nel 1901 (9)) nel caso di un aggregato numerabile

$$\mathfrak{M}_1, \quad \mathfrak{M}_2, \quad \mathfrak{M}_3,\dots, \quad \mathfrak{M}_n,\dots$$

di aggregati di punti di una retta, rientrerebbe nel principio di approssimazione. Basterebbe infatti, come fa W. SIERPINSKI in [3] pag. 120, portare ciascun aggregato $\mathfrak{M}_n$ in un aggregato $\mathfrak{M}_n'$ dell'intervallo $\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{n}$ di un medesimo sostegno (mediante una trasformazione biunivoca ben definibile) indi scegliere ad arbitrio in ciascun $\mathfrak{M}_n'$ un punto in modo da ottenere una successione decrescente tendente a 0, sulla quale si può ragionare come al n. 2. Ci pare però dubbia l'utilità che da tale procedimento si potrebbe ricavare nelle applicazioni.

Gli esempî che seguiranno mostreranno più in generale accettabile il principio di approssimazione per la definizione di enti

(9) [4] pag. 103.

consistenti in successioni di elementi individuati da uno o più numeri reali (coordinate) i quali soddisfano alle seguenti condizioni:

1^a^) Essi si possono rinchiudere in un numero finito d'intervalli finiti che indichiamo genericamente con λ.

2^a^) Un numero finito di tali numeri reali (da scegliersi come primi) si possono rinchiudere in intervalli λ' parziali dei λ.

3^a^) Tutti gli altri si possono rinchiudere in intervalli λ'' anch'essi parziali dei λ, ma tutti esterni ai λ' e di lunghezza complessiva minore di una frazione piccola quanto si vuole della lunghezza complessiva dei λ'.

6. In [1] pag. 318 il LEVI applica il principio di approssimazione alla regolarizzazione della seguente proposizione: « *Se un aggregato* A *di punti del piano è tale che corrispondentemente a ciascun punto di esso è definita una circonferenza i cui punti interni appartengono tutti all'aggregato, l'aggregato medesimo è costituito da tutti i punti interni ad un aggregato numerabile di dette circonferenze* ». La dimostrazione può applicarsi tale e quale ad un teorema di poco più generale, al cosidetto « *Ueberdeckungssatz* » di LINDELÖF (10). Naturalmente quella dimostrazione vale con semplici varianti per il caso generale in cui lo spazio ambiente è uno spazio ad un numero qualunque n di dimensioni. Per il caso della retta il teorema dice:

se fra un aggregato limitato (11) $\mathfrak{A}$ *di punti di una retta ed uno* Δ *d'intervalli intercede una corrispondenza univoca tale che ogni punto* A *di* $\mathfrak{A}$ *è interno all'intervallo corrispondente* δ *di* Δ, *allora esiste un numero finito o un'infinità numerabile*

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots \tag{2}$$

d'intervalli di Δ *ricoprente l'intero aggregato* $\mathfrak{A}$, *tale cioè che ogni punto di* $\mathfrak{A}$ *è interno ad almeno uno degl'intervalli* δ_n.

Questo teorema può essere enunciato in condizioni meno strette, cioè supponendo soltanto che *i due aggregati* $\mathfrak{A}$ *e* Δ *siano tali che ogni punto* A *di* $\mathfrak{A}$ *sia interno a qualcuno degl'intervalli di* Δ. Vale in tal caso ancora la ricordata dimostrazione di [1] pag. 318 e seg.

(10) [5] pag. 46.

(11) Qui è necessaria l'ipotesi restrittiva della limitazione dell'aggregato *A*, mentre non lo è nella ricordata proposizione di [1] pag. 318 (cfr. n. 5), la quale ha in vista un'applicazione alla teoria delle funzioni analitiche. Sappiamo infatti che in questa teoria la rappresentazione più propria del campo dei numeri complessi è quella che si fa sulla sfera: la superficie di una sfera è limitata.

7. Si applica abitualmente il teorema di LINDELÖF per dimostrare che ([12]) *ogni aggregato non numerabile contiene almeno uno dei suoi punti di condensazione* ([13]).

Non è possibile liberare questa proposizione dal postulato delle infinite scelte, ma, non volendo appoggiarsi al teorema di LINDELÖF, si può ragionare per assurdo come segue. Supponiamo, se possibile, che ogni punto dell'aggregato $\mathfrak{A}$ in questione non sia punto di condensazione di $\mathfrak{A}$. Racchiudiamo allora ogni punto di $\mathfrak{A}$ nell'intervallo di massima ampiezza, tale che la parte di $\mathfrak{A}$ in esso contenuta sia numerabile. Due di tali intervalli non potranno mai avere punti comuni senza essere identici: invero nell'ipotesi che essi avessero una parte comune, l'intervallo risultante dalla loro riunione (intervallo somma) sarebbe ancora tale che la parte di $\mathfrak{A}$ in esso contenuta è numerabile. Si viene in tal modo, dunque, a rinchiudere l'intero aggregato $\mathfrak{A}$ in un insieme d'intervalli esterni l'uno all'altro e tali che la parte di $\mathfrak{A}$ contenuta in ciascuno di essi è numerabile ([14]).

La possibilità di numerare l'aggregato degl'intervalli, per es. ponendoli in modo noto in ordine di lunghezza, permette di affermare, contraddicendo l'ipotesi, la numerabilità dell'aggregato $\mathfrak{A}$ in un ampliamento naturale del dominio deduttivo Ω dei numeri reali, e ciò applicando il principio di approssimazione.

Ammettiamo infatti per un momento che, eseguendo infinite scelte arbitrarie, si sia stabilita un'effettiva numerazione della parte di $\mathfrak{A}$ contenuta in ciascuno dei detti intervalli. Allora è possibile, in un secondo tempo, numerare l'intero aggregato $\mathfrak{A}$ in modo che ogni punto P di $\mathfrak{A}$ appartenente genericamente all'h-mo intervallo, occupi un determinato posto k-mo nella numerazione complessiva, indipendentemente dalle numerazioni prefissate negl'intervalli s-mi con $s > h$. Dunque, limitandosi alla effettiva numerazione di un numero *finito* d'intervalli, si può così disporre che la lunghezza totale degl'intervalli contenenti punti di cui il numero d'ordine (nella numerazione complessiva) non sia determinato sia piccola a piacere ed intanto i numeri d'ordine per cui non è determinato il punto corrispondente siano grandi a piacere.

In una Nota successiva applicherò il principio di approssimazione ad ottenere qualche interessante risultato nella teoria della misura.

([12]) [5] pag. 49.

([13]) « *Punto di condensazione* » è un punto in ogni intorno del quale esiste un'infinità non numerabile di punti dell'aggregato.

([14]) [4] pag. 124. Cfr. H. LEBESGUE in « Fundamenta Mathematicae », t. II, 1921, pag. 260.